Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Prvky teorie grafů v učivu matematiky na 1. stupni základní školy

Concepts from graph theory in primary school mathematic curriculum

Ing. Tatiana Mutinová

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: Učitelství pro základní školy (I. ST)

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Jaroslava Kloboučková

2014

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracovala pod vedením vedoucího diplomové práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato diplomová práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu. Souhlasím s trvalým uložením této práce v databázi Theses.

V Praze, 18.6.2014

Ing. Tatiana Mutinová

Děkuji své školitelce, Mgr. Jaroslavě Kloboučkové, za příležitost zpracovat tak zajímavé téma. Děkuji ZŠ Vl. Vančury, že mi umožnila studium na Karlově univerzitě a zajistila hladký průběh vyučování v mé třídě v době, kdy jsem se věnovala doplnění svého vlastního vzdělání. Děkuji všem svým dětem ze 3.D, že se s nadšením a pílí pouští do dalších a dalších matematických úkolů. A hlavně děkuji svému manželovi Petrovi a dětem Petře a Jakubovi za nekonečnou trpělivost a všechna povzbuzující slova.

Abstrakt

Tato diplomová práce je zaměřena na teorii grafů, a to zejména na prvky, které jsou použitelné ve vyučování matematiky na 1. stupni základní školy. Dále se zabývá důvody, proč je potřebné grafové úlohy do výuky matematiky zařazovat.

V teoretické části jsou uvedeny základní pojmy a definice z vybraných částí teorie grafů a na příkladech je ukázáno využití teorie grafů při řešení situací z reálného života. Praktická část mapuje současný stav uplatnění některých prvků teorie grafů v učivu matematiky na 1. stupni základní školy. Obsahuje také ukázku série gradovaných úloh a pracovní listy využitelné při zavádění a procvičování některých grafových pojmů. Experiment s mozaikami, který byl proveden v rámci této diplomové práce, je ukázkou propojení matematického a nematematického prostředí a badatelsky orientované výuky u dětí mladšího školního věku.

Klíčová slova: matematika, teorie grafů, vrchol grafu, stupeň vrcholu grafu, hrana grafu, problém dvou barev, dítě mladšího školního věku

Abstract

This diploma thesis is focused on graph theory, especially on the concepts that are used in primary school mathematic curriculum. Furthermore it shows the reasons why it is necessary to include these graph concepts in young pupil´s education.

In the theoretical part, basic terms and definitions from chosen parts of graph theory are mentioned and few examples demonstrate how the applications of graph theory can help with solving real-life situations. The practical part summarized the current use of some graph theory concepts in primary school mathematic curriculum. This part also includes the demonstration of the graded series of problems and the sheets of exercises that could be usable in introducing and practising of some graph concepts. The experiment with mosaics, that was carried out within this diploma thesis, is an illustration how to connect mathematical and non-mathematical world and how to integrate research activities in young pupil´s education.

Key words: mathematics, graph theory, graph vertex, degree of graph vertex, edge of graph, problem of two colours, child of primary school

Obsah

Úvod ... 7
Část I - Vymezení teoretického základu práce ... 8
1. Pojem grafu ... 8
1.1 Základní pojmy teorie grafů ... 10
1.2 Stupně vrcholů v grafu ... 14
1.3 Podgrafy a isomorfizmus ... 14
1.4 Orientované a neorientované grafy ... 16
2. Procházení grafem ... 18
2.1 Souvislost, komponenty ... 19
2.2 Vyšší stupně souvislosti ... 20
2.3 Jednotažky – eulerovské grafy ... 21
3. Vzdálenost v grafech ... 24
3.1 Vzdálenost v grafu a její základní vlastnosti ... 25
3.2 Metrika grafu a její výpočet ... 25
3.3 Hledání nejkratší cesty ... 27
4. Rovinné grafy ... 28
4.1 Nakreslení rovinného grafu ... 29
4.2 Stěny grafu ... 30
4.3 Charakterizace rovinných grafů ... 31
4.4 Barvení map a problém čtyř barev ... 33
Část II - Prvky teorie grafu ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ ... 36
1. Zmapování současného stavu ve vybraných učebnicích matematiky ... 36
2. Série gradovaných úloh ... 43
3. Úlohy k procvičení ... 49
Část III - Experiment se dvěma barvami ... 51
1. Experiment ve výuce ... 51
2. Tři fáze experimentu s dvěma barvami ... 53
2.1 Fáze přípravná ... 53
2.2 Fáze realizační ... 56
2.3 Fáze hodnoticí (diskuse) ... 63
Závěr ... 65

Použitá literatura a internetové zdroje ... 67
Příloha č. 1 ... 69
Příloha č. 2 ... 73
Příloha č. 3 ... 75
Příloha č. 4 ... 80
Příloha č. 5 ... 84
Příloha č. 6 ... 86
Příloha č. 7 ... 88
Příloha č. 8 ... 90
Příloha č. 9 ... 92
Příloha č. 10 ... 94
Příloha č. 11 ... 101
Příloha č. 12 ... 106
Příloha č. 13 ... 110
Příloha č. 14 ... 114

Úvod

S grafy a grafovými úlohami, situacemi a problémy, při řešení kterých se pohybujeme na půdě teorie grafů, se setkáváme na nejrůznějších a často i nečekaných místech. Tato setkání bývají ale natolik přirozená, že bychom v nich vyšší matematiku, kdyby nás na to odborník na slovo vzatý neupozornil, vůbec nehledali.

Která kočička rozmotala babičce klubíčko vlny? Po které pěšince se musí vydat zajíček, aby se cestou domů vyhnul liščatům? Už předškolní děti cestují prstem po obrázku a ani v nejmenším netuší, že řeší grafovou úlohu „nalezení cesty v grafu“. Později jim nedá spát domeček, který lze nakreslit jedním tahem. V řeči teorii grafů mluvíme o jednotažkách a eulerovských grafech.

Co všechno ještě můžeme grafem reprezentovat? Čas plyne a my se potkáváme s dalšími a dalšími grafovými úlohami. V českém jazyce nám mohou grafy zjednodušit zkoumání a vyjadřování stavby větných celků. Hledáme v jízdních řádech, čteme mapy měst, zastávek vlaků či autobusů, studujeme a zakreslujeme politické mapy.

Na střední škole pak na nás ve fyzice a chemii čekají různé technické nákresy, elektroschémata, chemické sloučeniny a v informatice vývojové diagramy. V biologii můžeme grafem reprezentovat např. diagram křížení druhů, v sociologii pak vztahy mezi lidmi.

Podnikatelé optimalizují výrobní procesy, distributoři rozvážejí zboží, listonoš doručuje poštu do všech domů v nějaké obci, potřebujeme vyčistit všechny ulice města, svézt tříděný odpad, ... Jak to zařídit, aby obchodní cestující vyjel z jednoho města, projel všemi ostatními městy právě jednou a vrátil se do výchozího města? Jak dosáhnout toho, aby náklady na jeho cestu byly minimální a její délka byla co nejkratší?

Chceme navštívit příbuzné. Jak je za jedno odpoledne ale navštívit všechny tak, abychom pořád jenom nejezdili a měli na sebe více času?

Všechny tyto situace vycházející ze skutečného života mají něco společného. Problematika, kterou popisují, se dá nějakým způsobem zakreslit do obrázku. Pomocí kroužků (teček, bodů) a čar (křivek, šipek), které tyto body spojují.

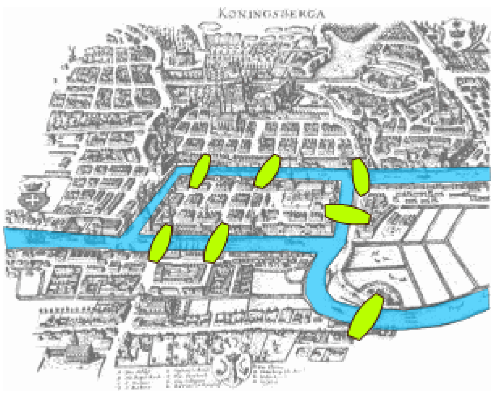
Protože to budou naše děti, kdo bude tyto situace za několik let řešit místo nás, měly by být připravené. V hodinách matematiky mohou získat první zkušenosti s tím, že si mohou některé úlohy jako obrázek nakreslit a že ten obrázek jim může s řešením nakreslené úlohy pak také pomoct.

Část I - Vymezení teoretického základu práce

1. Pojem grafu

Ke vzniku matematiky vedla lidstvo potřeba řešit běžné praktické úlohy, mezi které patří např. počítání při obchodování, vyměřování a dělení pozemků, budování obydlí i měření času. Zabýval se jí už vlastně pravěký člověk, když se poprvé pokoušel spočítat svůj úlovek.

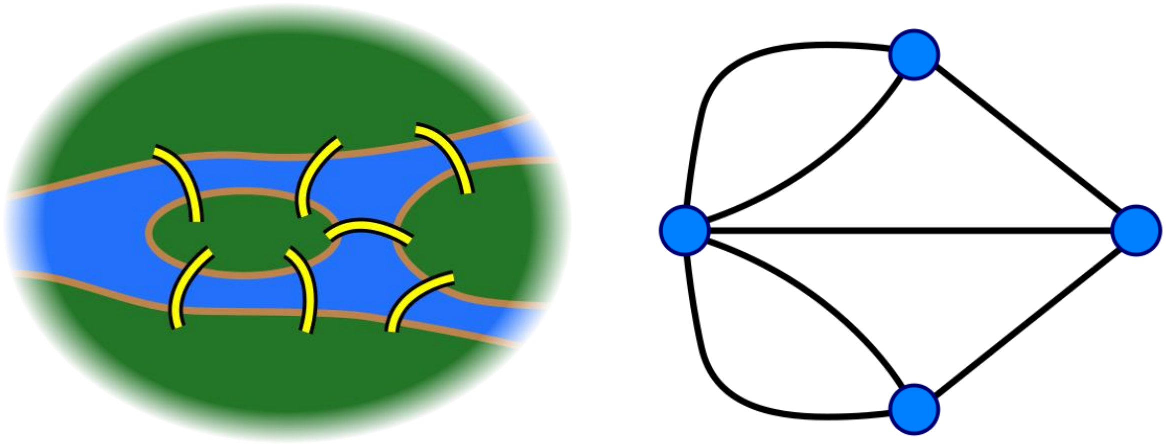
Pokud by nás zajímala historie teorie grafů, nemuseli bychom sahat až do tak dávné minulosti. Je to ve srovnání s aritmetikou nebo geometrií poměrně mladá matematická disciplina. Její počátky jsou podle P. Šišmy (1998, s. 89) spojeny s 18. stoletím a jménem Leonharda Eulera (1707 – 1783). V roce 1736 vyřešil tento průkopnický švýcarský matematik a fyzik jako první slavný matematický problém sedmi mostů pruského města Královce (Königsbergu nyní Kaliningradu).



Obr. 1.1 - Mapka Královce z Eulerových dob s vyznačením sedmi mostů

(zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Sedm_mostů_města_Královce)

Řeka Pregola, která městem Královec protéká, vytváří na jeho území dva ostrovy (obr.1.1). Tyto ostrovy byly v době L. P. Eulera spojeny s ostatním městem sedmi mosty. Matematický svět byl v 18. století postaven před problém, zda je možné naplánovat procházku městem tak, aby procházející se přešel každým mostem ve městě právě jednou a vrátil se zpět do výchozího místa. Skutečné město a skutečnou situaci převedl Euler na graf. Každý břeh si představil jako vrchol a každý most použil jako hranu, která břehy spojuje (obr. 1.2).



Obr. 1.2 – Modelování reálné situace se sedmi mosty ve městě Královec
(zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Sedm_mostů_města_Královce)

Leonhardu Eulerovi se povedlo matematicky dokázat, že v takto vytvořeném grafu neexistuje eulerovský tah, což znamená, že v něm nemůžeme najít takovou posloupnost vrcholů a hran, ve které se každá hrana vyskytuje právě jednou a každý vrchol aspoň jednou (Matoušek a Nešetřil, 2009, s. 135), a tudíž za daných podmínek není možně městem projít.

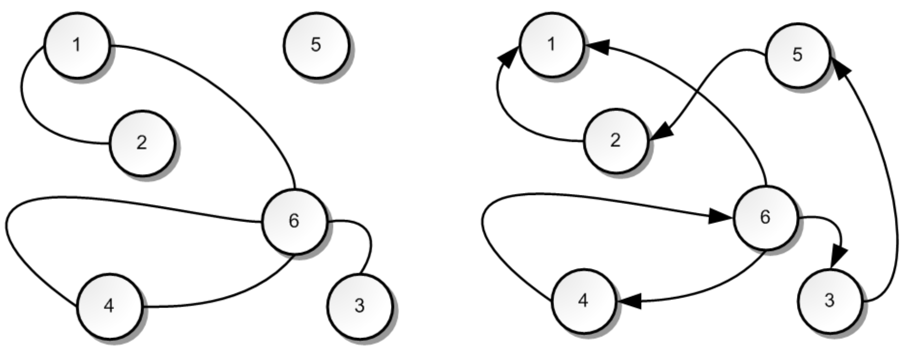
Teorie grafů jako součást diskrétní matematiky nachází v dnešní době, jak už bylo v úvodu nastíněno, své uplatnění při řešení mnoha praktických úloh. Její výhodou je snadná a intuitivní představa, pomocí které modeluje reálnou situaci jako množinu objektů (vrcholů) a vztahy mezi těmito objekty (hrany grafu).

Problém, který je předmětem studia, znázorníme tedy pomocí schématu sestávajícího z (konečné) množiny bodů a spojnic mezi některými dvojicemi těchto bodů (Matoušek a Nešetřil, 2009, s. 111). Body mohou reprezentovat například žáky nově vznikající třídy na začátku školního roku a spojnice ty dvojice žáků, kteří se mohou znát z předcházejícího školního roku. Body mohou odpovídat obcím nacházejícím se na území nějakého kraje a spojnice jsou silnice, které tyto obce spojují. Když pomineme vzhled okolní krajiny, nebudeme se zajímat o to, jak města vypadají, a dokonce ani o přesný tvar silnic, dostaneme zjednodušeně řečeno obrázek, který je vytvořen z konečného počtu bodů pospojovaných porůznu křivkami. Od reálného problému se dostaneme k matematické struktuře.

1.1 Základní pojmy teorie grafů

V teorii grafů nebudeme chápat graf ani jako graf funkce, který slouží ke grafickému znázornění průběhu funkce, ani jako diagram, s kterým se můžeme setkat ve statistice. Teorie grafů chápe graf jako algebraickou strukturu, která přehledně popisuje objekty a vztahy mezi nimi.

Nejjednodušší představa takto pojímaného grafu vychází z toho, že objektům, kterým říkáme vrcholy, přiřadíme v rovině body vyznačené nejčastěji puntíky. Hrany se vyjádří spojením příslušných dvojic bodů křivkami nebo rovnými čarami. Spojnice bodů se smějí případně křížit, ale nesmějí procházet jinými vrcholy.



Obr. 1.1.1 – Příklady grafů, graf neorientovaný a graf orientovaný
(zdroj: http://old.voho.cz/wiki/matematika/graf/)

Definici grafu, s kterým pracuje teorie grafů, najdeme u dvojice autorů MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 111): *„Graf G je uspořádaná dvojice (V,E), kde V je nějaká neprázdná množina a E je množina dvoubodových podmnožin množiny V. Prvky množiny V se jmenují vrcholy grafu G a prvky množiny E hrany grafu G.“*

Zápisem *G = (V, E)* říkáme, že graf *G* má množinu vrcholů *V* (z angl. *vertex*) a množinu hran *E* (z angl. *edge*). Množinu vrcholů grafu *G* značíme *V(G).* Podobně zapisujeme i množinu jeho hran *E(G).* Pro množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny *V* se používá označení $\binom{V}{2}$. V návaznosti na to, pak MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 112) shrnují:

„Graf je dvojice (V, E), kde $E \subseteq \binom{V}{2}$ *."*

O množině vrcholů *V(G)* budeme vždy předpokládat, že je neprázdná. Připustíme-li u množiny hran *E(G)* možnost *E(G)* = *Ø* (*Ø* je prázdná množina), graf *G* se pak nazývá prázdným grafem (Nečas, 1978, s. 12).

Vrcholy, které hrana v grafu *G* spojuje, jsou jejími krajními nebo koncovými vrcholy. Je-li daná hrana orientovaná, tj. vede pouze jedním směrem, mluvíme o počátečním a koncovém vrcholu hrany (Nečas, 1978, s. 12). S orientovanými hranami se můžeme setkat např. při popisu silniční sítě, kdy orientovaná hrana odpovídá jednosměrné silnici.

Vrcholy grafu *G* mohou být sousední, nebo nesousední, tj. nezávislé. Dva vrcholy jsou sousední v grafu *G*, právě když existuje taková hrana z množiny hran *E(G)*, na níž oba tyto vrcholy leží (Nečas, 1978, s. 12). V případě, že taková hrana v množině hran *E(G)* neexistuje, jsou tyto vrcholy nesousední nebo nezávislé.

Definice hran jako dvoubodových množin vrcholů mimo jiné říká, že dva dané vrcholy mohou být spojeny nejvýš jednou hranou. Pokud ale připustíme, že v některých situacích můžeme spojit dva vrcholy i několika (různými) hranami, dostaneme graf s násobnými nebo rovnoběžnými hranami, tj. multigraf (Matoušek a Nešetřil, 2009, s. 139).

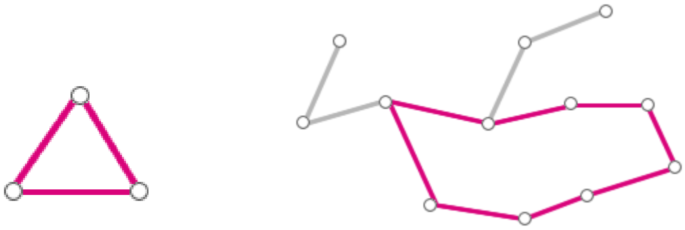
Hrana, jejíž oba krajní vrcholy v grafu *G* splývají, tudíž spojuje jeden vrchol sám se sebou samým, se nazývá smyčka. Smyčku u vrcholu *v* v množině hran *E* můžeme jednoduše reprezentovat jako jednoprvkovou množinu *{v}* (Matoušek a Nešetřil, 2009, s. 139).

V případě, že mají dvě hrany aspoň jeden krajní vrchol společný, mluvíme v teorii grafů o přilehlých hranách (Nečas, 1978, s. 12).

V teorii grafů se setkáváme s některými typy konkrétních grafů, které mají z důvodu zjednodušení vyjadřování svá standardní názvosloví a označení. Jedná se o kružnici C_n (obr. 1.1.2), cestu P_n (obr. 1.1.3) a úplný bipartitní graf $K_{n,m}$ (obr.1.1.4). MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 113) je definují následovně:

„*Kružnice* C_n (kde $n \geq 3$):

$V = \{0, 1, . . . , n\}, E = \{\{i , i+1\}; i = 1, . . . , n -1\} \cup \{\{1, n\}\}$."

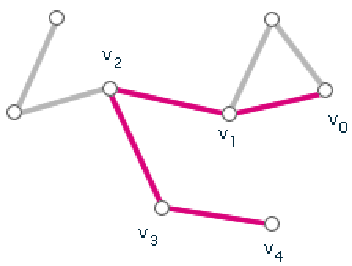


Obr. 1.1.2 – Trojúhelník jako nejkratší kružnice a kružnice v obecném grafu

(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

„*Cesta* P_n *(kde* $n \geq 0$*):*

$V = \{0, 1, . . . ,n\}, E = \{\{i-1, i\}; i = 1, . . . ,n\}$."



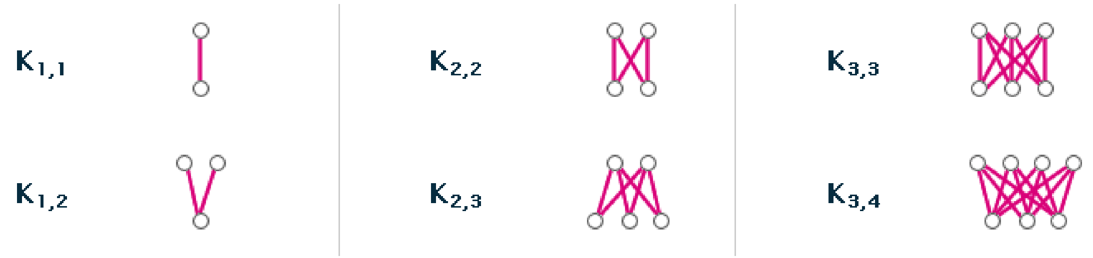
Obr. 1.1.3 – Příklad cesty v grafu (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)

(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

„Úplný bipartitní graf $K_{n,m}$ (kde n, m ≥ 1):

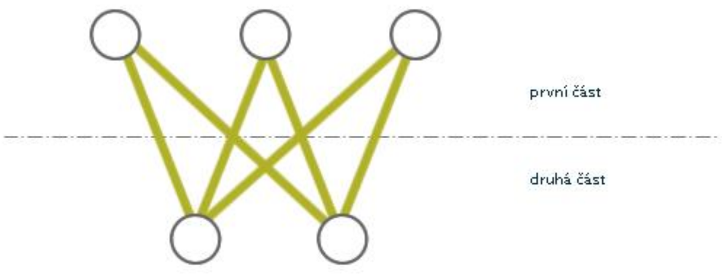
$V = \{u_1, . . . ,u_n\} \cup \{ v_1, . . . , v_m\}$,

$E = \{\{u_i, v_j\}; i = 1, 2, . . . , n, j = 1, 2, . . . ,m\}$."



Obr. 1.1.4 – Příklady úplných bipartitních grafů
(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

Zjednodušeně bychom mohli říci, že bipartitní graf (obr 1.1.5) je takový graf, ve kterém můžeme množinu jeho vrcholů rozdělit na dvě části, přičemž z každého vrcholu jedné části jde hrana pouze do vrcholu druhé části a naopak. O úplném bipartitním grafu mluvíme v případě, že jde z každého vrcholu jedné části hrana do každého vrcholu druhé části.



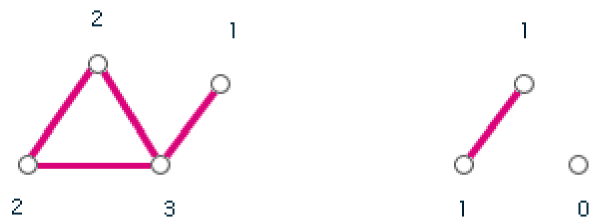
Obr. 1.1.5 – Příklad bipartitního grafu $K_{2,3}$
(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

1.2 Stupně vrcholů v grafu

Pokud použijeme graf jako matematický model, kterým můžeme popsat vztahy mezi objekty, určitě bude pro nás důležité vědět, kolik hran - spojnic z jednotlivých vrcholů vychází, nebo kolik sousedních vrcholů ten který vrchol má. Proto definujeme pojem stupeň vrcholu v grafu (obr. 1.2.1).

Autoři MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 129) jej definují následovně:

„Nechť G je graf, v jeho vrchol. Symbolem $deg_G(v)$ *označme počet hran grafu obsahujících vrchol v. Číslo* $deg_G(v)$ *nazveme stupněm vrcholu v v grafu G."* A dále pak: *„Označme vrcholy grafu G* $v_1, v_2, ...v_n$ *(v nějakém libovolně zvoleném pořadí). Posloupnost* $(deg_G(v_1), deg_G(v_2), ..., deg_G(v_n))$ *nazýváme posloupnost stupňů grafu G, nebo skóre grafu G."*



Obr. 1.2.1 - Příklad stupňů vrcholů v grafu

(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

1.3 Podgrafy a isomorfizmus

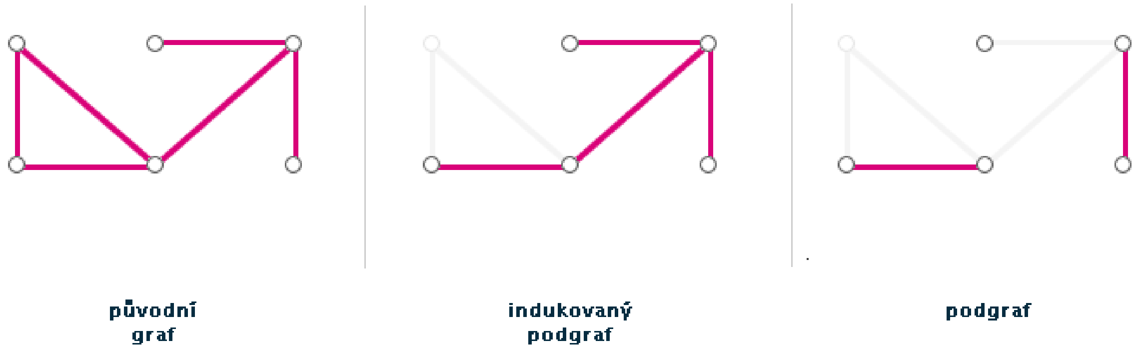
Nechť *G* je libovolný graf. Odebereme-li z něj některé vrcholy a všechny hrany, které vymazané vrcholy obsahují, dostaneme graf *H*, který je indukovaným podgrafem grafu *G*. U autorů MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 118) najdeme tuto definici:

„Řekněme, že graf H je indukovaným podgrafem grafu G, jestliže V(H) $\subseteq$ *V(G) a*

$$E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$$."

Pokud budeme ve vymazávání pokračovat a odebereme některé další hrany (obr. 1.3.1), i když nevymažeme žádný z jejích koncových vrcholů, bude graf *H* podgrafem grafu *G*. MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 118) jej definují:

„Řekneme, že graf H je podgrafem grafu G, jestliže V(H) ⊆ V(G) a E(H) ⊆ E(G).“



Obr. 1.3.1 – Ukázka vymazávání vrcholů a hran
(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

Modelování reálné situace grafem je praktické především proto, že jak již bylo uvedeno, abstrahujeme od konkrétní situace a zaměřujeme se na podstatné vlastnosti struktury, tj. který vrchol je sousední s kterým vrcholem. Může takhle dojít k tomu, že téže situaci odpovídají i dva na první pohled různé grafy. Tyto grafy budou mít různě označené vrcholy a v obrázcích mohou být tyto vrcholy umístěny i jiným způsobem.

Pokud jsou např. předmětem našeho zájmu děti v nově vznikající třídě, můžeme v jednom případě použít pro označení vrcholů první písmena jejich příjmení a podruhé bychom mohli děti očíslovat. Přestože se liší označením svých vrcholů a hran, grafy, které takto sestavíme, stále popisují tutéž situaci, množiny jejich vrcholů a hran jsou totožné. Říkáme, že grafy jsou isomorfní.

Abychom si isomorfismus grafů ještě více přiblížili, vytvoříme si představu, že hrany grafu jsou gumičky. Tyto gumičky nelze přetrhnout, a tak je můžeme neomezeně natahovat, natáčet i přesouvat vrcholy. Podaří-li se nám tímto způsobem vytvořit z jednoho grafu druhý, potom můžeme říct, že tyto dva grafy jsou isomorfní (obr. 1.3.2).

$G = G'$ znamená $V(G) = V(G')$ a $E(G) = E(G')$

Obr. 1.3.2 - Příklad isomorfních grafů
(zdroj: http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf)

MATOUŠEK a NEETŘIL (2009, s. 114) definují isomorfismus následovně:

„Dva grafy G=(V,E) a G'=(V',E') nazveme isomorfní, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : V \rightarrow V'$ tak, že platí: {x,y} ∈ E, právě když {f(x), f(y)} ∈ E'."

Nutnou (nikoliv však postačující) podmínkou isomorfismu dvou nakreslených grafů je rovnost počtu vrcholů a hran. Jejich stupně vrcholů seřazené do neklesající posloupnosti by měly být shodné a každý vrchol grafu by měl mít sousedy stejného stupně jako odpovídající vrchol v grafu isomorfním (Hliněný, 2008, s. 5).

1.4 Orientované a neorientované grafy

Jestliže se vrátíme k myšlence, že se graf, jak ho chápe teorie grafů, používá k modelování reálné situace, potřebujeme někdy vyjádřit směr hrany. Jako příklad nám mohou posloužit úlohy o změnách stavu, mezi které patří např. úloha o nádobách.

V úloze o nádobách, kterou najdeme v Šišmovi (1997b, s. 91) máme k dispozici 3 láhve vody. První má objem 8 litrů a je plná vody, druhá, která má objem 5 litrů a třetí třílitrová, jsou prázdné. Naším úkolem je najít způsob, jakým přelévat vodu tak, abychom měli na konci přelévání dvakrát 4 litry vody.

Při grafickém znázornění této úlohy charakterizujeme stav vody v nádobách trojicí čísel, která udává množství vody v jednotlivých nádobách, a každé trojici pak přiřadíme vrchol grafu. Pokud se můžeme jedním přelitím dostat z jednoho stavu do stavu jiného, znázorníme to šipkou. Reálná situace je pak znázorněná orientovaným grafem.

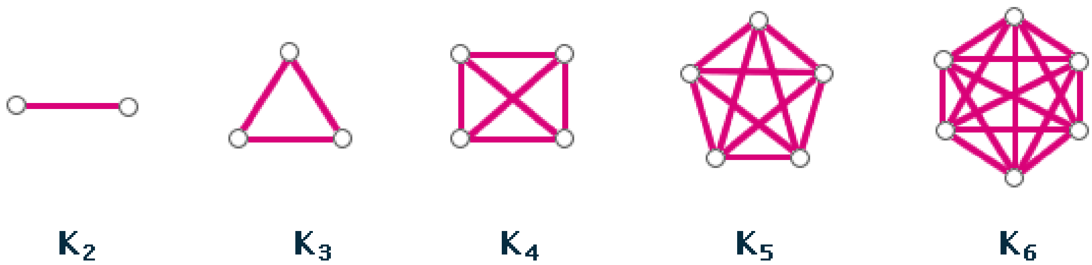
Graf, ve kterém jsou všechny hrany orientované, se nazývá orientovaný a graf, ve kterém nebudeme rozlišovat směr hrany, budeme nazývat neorientovaný (viz podkapitola 1.1, obr. 1.1.1). V teorii grafů se může pracovat i s grafy smíšenými, tj. takovými, které obsahují jak orientované, tak i neorientované hrany (Nečas, 1978, s. 11).

MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 143) pak definují orientovaný graf následovně*:*

„Orientovaný graf G je dvojice (V, E), kde E je podmnožina kartézského součinu V × V. Prvky E nazýváme šipky (nebo orientované hrany). Tedy šipka e má tvar (x, y). Říkáme, že tato šipka vychází z x a končí v y .“

U neorientovaných i orientovaných grafů se ještě setkáme s pojmem jednoduchý neorientovaný, resp. orientovaný graf. Jejich vysvětlení najdeme u NEČASE (1978, s. 12):

„Neorientovaný graf se nazývá jednoduchý, právě když v něm k žádné hraně neexistuje hrana rovnoběžná. Jednoduchý neorientovaný se nazývá úplný, právě když každé jeho dva (navzájem různé) uzly jsou spojeny hranou,“ (obr. 1.4.3).



Obr. 1.4.3 – Příklady úplných grafů

(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

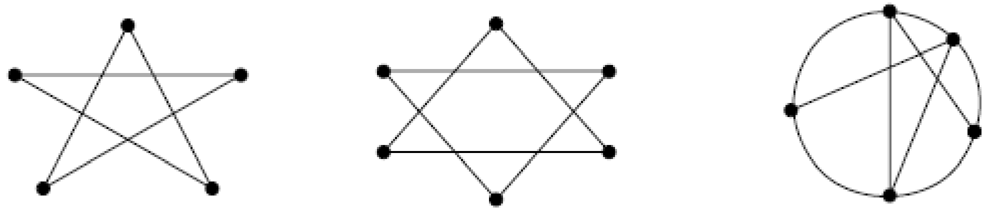
U NEČASE (1978, s. 12) najdeme i definici jednoduchého orientovaného grafu:

„*Orientovaný graf se nazývá jednoduchý, právě když v něm k žádné hraně neexistuje hrana souhlasně rovnoběžná. Jednoduchý orientovaný graf se nazývá úplný, právě když každé jeho dva (navzájem různé) uzly jsou spojeny aspoň jednou hranou; pokud jsou v něm každé dva (navzájem různé) uzly spojeny dvěma nesouhlasně rovnoběžnými hranami, mluvíme o silně úplném grafu*.“

2. Procházení grafem

Pokud grafem modelujeme nějaké dopravní, telefonní, potrubní spojení či síť, přímo se nabízí otázka, jaké máme možnosti dostat se z libovolného místa znázorněného vrcholem v tomto grafu do jiného libovolného místa v témže grafu. Je pochopitelné, že bychom v takových sítích chtěli, aby existovala cesta z každého místa do každého jiného místa.

Grafům, které tuto vlastnost mají, říkáme souvislé. Jestliže budeme mluvit o souvislosti grafu, je důležité si ujasnit, že máme na mysli možnost procházet mezi vrcholy grafu po jeho hranách. Když si tohle uvědomíme, poznáme, ve kterém z následujících grafů (obr. 2.1) můžeme a ve kterém nemůžeme mezi vrcholy po hranách procházet (Hliněný, 2008, s. 14).



Obr. 2.1 – Příklady souvislého a nesouvislého grafu
(zdroj: http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf)

Na první pohled se nám může zdát, že ve všech třech grafech na obr. 2.1 by neměl být problém mezi vrcholy po jejich hranách procházet. Když si ale uvědomíme, že body, ve kterých se hrany v grafu mohou křížit, vrcholy nejsou, narazíme na problém u grafu prostředního. Zjistíme, že neexistuje spojení mezi vrchním a spodním vrcholem, tudíž se jedná o graf nesouvislý.

2.1 Souvislost, komponenty

MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 119) definují souvislý graf následovně:

„Řekněme, že graf G je souvislý, jestliže pro každé dva jeho vrcholy x a y v něm existuje cesta z x do y."

Je důležité si uvědomit, že když procházíme grafem, tak procházíme hranami pokaždé mezi dvěma sousedními vrcholy. Procházka po hranách z vrcholu x do vrcholu y se pak nazývá sled. MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 121) definují pojem sledu v grafu takto:

„Nechť G = (V, E) je graf. Posloupnost (v_0, e_1, v_1, e_2, ... , e_n, v_n) se nazývá sled v grafu G (obšírněji sled délky n z v_0 do v_n), jestliže platí e = {v_{i-1}, v_i} ∈ E pro i = 1, ..., n."

Takto definovaný sled v grafu se od cesty liší tím, že se v něm mohou některé vrcholy i hrany opakovat. Zjednodušení definice by mohla nabídnout představa záznamu trasy poutníka, který bloudí (Matoušek a Nešetřil, 2009, s. 122).

I nesouvislý graf se může skládat z částí, které samy o sobě souvislé jsou a nazývají se komponenty souvislosti. Např. nesouvislý graf na obr. 2.1 se skládá ze dvou trojúhelníků.

U HLINĚNÉHO (2008, s. 15) pak najdeme jinou obdobu definice souvislého grafu:

„Graf G je souvislý, pokud je G tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy jsou spojené cestou."

2.2 Vyšší stupně souvislosti

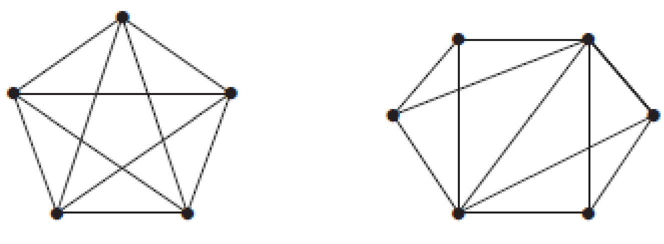
Představme si situaci, kdy graf znázorňuje silniční síť. Za normálních okolností jsou v něm každé dva vrcholy spojené cestou, jedná se tedy o graf souvislý. Co se ale stane, jestliže se některé z ulic stanou na nějaký čas neprůjezdnými? Jaká spojení najdeme v této síťové aplikaci v případě lokálních výpadků? V teorii grafů se proto zkoumají i vyšší stupně souvislosti grafu.

U HLINĚNÉHO (2008, s. 17) se dočteme:

„Graf G je hranově k – souvislý, k > 1, pokud i po odebrání libovolných nejvýše k – 1 hran z G zůstane výsledný graf souvislý. Graf G je vrcholově k – souvislý, k > 1, pokud i po odebrání libovolných nejvýše k – 1 vrcholů z G zůstane výsledný graf souvislý.“

Dále se dozvíme, že úplný graf K_n je vrcholově (n – 1) – souvislý a jestliže se mluví o k – souvislém grafu, obyčejně se myslí vrcholově k – souvislý graf.

Vysoká hranová souvislost představuje vysoký stupeň odolnosti sítě vůči výpadkům spojení. Můžeme tomu rozumět tak, že i když vypadne libovolných k - 1 spojení (hran), síť zůstane stále dosažitelná. Mnohem větší jistotu dosažitelnosti sítě zaručí ale vrcholová souvislost. Vysoká vrcholová souvislost zaručí, že síť zůstane stále dosažitelná, i když vypadne libovolných k – 1 vrcholů, mimo vypadlých vrcholů (Hliněný, 2008, s. 17).



Obr. 2.2.1 – Příklad vrcholově a hranově souvislého grafu
(zdroj: http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf)

Graf, který je na obr. 2.2.1 umístěný vlevo, má vrcholovou souvislost 4 a souvislým zůstane i po odebrání jeho tří vrcholů či hran. Ze souvislého grafu, který je umístěný na témže obrázku vpravo, se stane nesouvislý, pokud mu odebereme minimálně tři hrany. Proto má hranovou souvislost 3.

2.3 Jednotažky – eulerovské grafy

V MATOUŠKOVI a NEŠETŘILOVI (2009, s. 135) najdeme zadání jedné ze základních (a také nejstarších) úloh, při řešení které mají grafy své uplatnění: *„Nakreslete daný graf G = (V, E) jedním uzavřeným tahem, bez zvednutí tužky z papíru (přičemž žádná hrana se neobtahuje dvakrát.).“*

MATOUŠEK A NEŠETŘIL (2009, s. 135) pak toto zadání matematicky formalizují následovně: *„Najděte uzavřený sled* $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0)$*, v němž se každá hrana vyskytuje právě jednou.“*

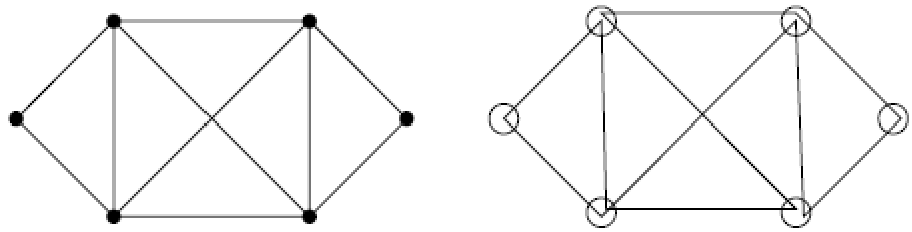
Takový sled, který začíná a končí v témže vrcholu, se pak nazývá uzavřeným eulerovským tahem a v návaznosti na existenci eulerovského tahu mluvíme také o eulerovském grafu. MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 135) uvádějí:

„Graf je eulerovský právě *když má aspoň jeden uzavřený eulerovský tah.“*

Jestliže si položíme otázku, za jakých podmínek existuje sled, který používá každou hranu daného grafu právě jednou, je potřebné definovat pojem tah. MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 135) jej jednoduše definují: *„jako sled, v němž se žádná hrana neopakuje (vrcholy se opakovat mohou).“* V orientovaném grafu, může pak existovat orientovaný tah, který respektuje orientaci hran.

Nutnou podmínkou pro to, abychom v grafu našli při sestrojování obrázku jedním tahem v podstatě úplnou uzavřenou cestu, je, aby byl daný graf souvislý, resp. silně souvislý. Při hledání této úplné uzavřené cesty je pak zřejmé, že když budeme procházet jeho vrcholy, pak kolikrát do každého z vrcholů vstoupíme, tolikrát z něj i vystoupíme nevyjímaje vrchol, ve kterém jsme jednotažku začali.

Pokud řešíme úlohy na sestrojení obrazce jedním tahem, zahájení a ukončení tahu v témže vrcholu nemusí zadání vyžadovat. V tomto případě budeme mluvit o otevřeném eulerovském tahu. Ten se definuje stejně jako tah uzavřený, pouze se nevrací do vrcholu, ve kterém začal.



Obr. 2.3.1 – Příklad uzavřeného tahu

(zdroj: http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf)

Při samotném rozhodování o tom, jestli se dá, resp. nedá zadaný obrazec nakreslit jedním tahem, se můžeme opřít o pravidla, kterými uzavřel v roce 1736 své řešení problému sedmi mostů města Královce Leonard Euler. U ŠIŠMY (1997a, s. 16) se dočteme:

„Jsou-li v grafu více než dva uzly lichého stupně, pak eulerovský tah neexistuje.

Jsou-li v grafu právě dva uzly lichého stupně, pak existuje otevřený eulerovský tah začínající v jednom z těchto uzlů a končící v druhém.

Jestliže jsou v grafu všechny uzly sudého stupně, pak existuje uzavřený eulerovský tah.“

Řeka Pregola, která městem Královec protéká, vytváří na jeho území dva ostrovy. Tyto ostrovy byly v Eulerově době spojeny s ostatním městem sedmi mosty. Matematický svět byl v 18. století postaven před problém. Městští radní chtěli vědět, zda si mohou naplánovat procházku městem tak, aby přešli suchou nohou po každém ze sedmi mostů právě jednou a přitom se na konci své procházky vrátili do místa, ve kterém ji začali. Skutečné město a skutečnou situaci převedl Euler na graf (viz kapitola 1, obr. 1.2).

V tomto grafu představují uzly jednotlivé části města Královce a hrany jsou zobrazením sedmi mostů ležících na řece Pregole a spojujících tyto městské části.

Euler matematicky dokázal, že úloha nemá za daných podmínek řešení, tudíž nemůžeme vyjít z určitého místa, projít všechny mosty, každý z nich však pouze jedenkrát a vrátit se do výchozího místa. Podle Eulera je tato úloha neřešitelná, tj. nemůžeme projít tímto způsobem všechny mosty, ani když nebudeme trvat na navrácení se do výchozího místa.

Graf znázorňující situaci ve městě Královci v Eulerově době je sice souvislý, ale neexistuje v něm uzavřený ani otevřený eulerovský tah, protože všechny jeho vrcholy jsou lichého stupně.

Věta charakterizující eulerovské grafy, jak ji uvádějí MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s, 135), zní:

„Graf G je eulerovský právě když je souvislý a každý vrchol G má sudý stupeň.“

Pokud se v této kapitole zabýváme otázkou procházení grafů, nelze nevzpomenout tzv. problém čínského pošťáka. Už v roce 1960 jej nejdříve definoval, a pak i řešil čínský matematik Meigu Guan (Šišma, 1997, s. 20). V podstatě se jednalo o zajímavou variantu Eulerova problému. Pošťák musí denně projít všemi ulicemi svého doručovacího obvodu. Měl by urazit co nejmenší vzdálenost a vrátit se zpět do místa, z kterého vyšel.

Jednotažky mají i jiné praktické aplikace. Potřebujeme např. naplánovat trasu vozidel provádějících údržbu silnic ve městě. V létě je potřebné ulice kropit nebo zamést, v zimě je zprovoznit po sněhové kalamitě, ošetřit posypem. Je zřejmé, že je důležité, aby byla ve městě ošetřená každá ulice a aby bylo naše řešení co nejefektivnější, je potřeba odstranit zbytečné opakování. Podstatou naplánování takovéto trasy je vlastně nalezení uzavřeného eulerovského tahu (Habala, 2012, s. 9).

Teorie grafů pomáhá také s řešením jiného ekonomického požadavku, který se spojuje např. s rozvozem zásilek. Při plánování trasy se dbá na to, aby nebylo žádné místo navštíveno dvakrát. Podmínka se zdá být na první pohled jednoduchá, ale když se zakáže opakování vrcholů, zakáže se v podstatě návrat domů, což může být velmi velice nepraktické. Řešením je zákaz opakování v průběhu trasy, ale umožnění návratu do výchozího místa (Habala, 2012, s. 9). Z historie teorie grafů je tato úloha známá jako Problém obchodního cestujícího. Ten má navštívit všechna města podle mapy měst, kterou vlastní, ale žádné dvakrát a chce se vrátit, tudíž hledá uzavřenou cestu. (Habala, 2012 s. 14).

Uzavřené cestě, která obsahuje všechny vrcholy grafu právě jednou, se v teorii grafů říká Hamiltonovská kružnice a graf, ve kterém taková kružnice existuje je graf hamiltonovský (Habala, 2012, s. 14).

Zatímco jsou uzavřené eulerovské tahy snadno zvládnutelné, podmínky, za kterých by se dalo jednoznačně určit, zda je pro daný graf problém obchodního cestujícího řešitelný, nejsou známé.

U NEČASE (1978, s. 110) najdeme zadání problému obchodního cestujícího tak, jak se s ním nejčastěji potkáme. Nehledá se jakákoli hamiltonovská kružnice, ale ta nejkratší: *„Mějme ohodnocený souvislý neorientovaný graf, v němž uzly představují nějaká města a hrany silniční spoje mezi nimi; ohodnocení vyjadřuje délku příslušného silničního spojení. Obchodní cestující má vyjet z jednoho města, projet všemi ostatními městy právě jednou a vrátit se do výchozího města. Aby šetřil náklady, má se snažit, aby délka cesty byla co nejkratší.“* Jak uvádí Habala (2012, s. 15), řešení, dokonce blízké tomu optimálnímu, lze najít, pokud hodnoty hran splňují trojúhelníkovou nerovnost. Jedná se o situaci, kdy je přímá cesta z jednoho místa do místa druhého vždy kratší než cesta oklikou.

3. Vzdálenost v grafech

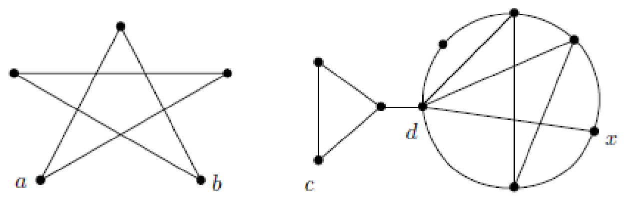
Umíme si představit situaci, kdy se chystáme na výlet. Vyjíždíme z Prahy a cíl naší cesty je v Peci pod Sněžkou. Někdy si vystačíme s informací, že se např. z Prahy do Pece pod Sněžkou vůbec dostaneme, jindy nás zajímá, jak je to daleko, hledáme nejvýhodnější vlakové či autobusové spojení, plánujeme nejvýhodnější trasu jízdy autem.

Pracujeme s mapou silniční sítě České republiky, s vyznačenými vzdálenostmi mezi jednotlivými obcemi a orientacemi jednotlivých silnic, kterou si můžeme znázornit grafem. Vrcholům grafu odpovídají silniční křižovatky a silnice mezi nimi hranám. Každou hranu reprezentující úsek silnice můžeme ohodnotit pomocí délky příslušného úseku v kilometrech. Orientací hran pak můžeme navíc znázorňovat případně jednosměrky v silniční síti, ve které trasu hledáme. Proto se můžeme ptát, jaká cesta je nejkratší, kolik je to kilometrů, kudy vede, a když vezmeme do úvahy i maximální povolené rychlosti na každém úseku silnice, řidič může dostat i informaci, jak dlouho by měla jeho cesta do Pece pod Sněžkou trvat.

3.1 Vzdálenost v grafu a její základní vlastnosti

Při hledání grafové vzdálenosti v neohodnoceném grafu se budeme dívat jenom na nejmenší počet hran, které musíme projít na cestě z jednoho vrcholu do vrcholu druhého. Např. na obr. 3.1.1 je grafová vzdálenost mezi vrcholy a, b rovna 2, vzdálenost mezi vrcholy c, x je rovna 3. Tato situace by odpovídala ohodnocenému grafu se stejně dlouhými stranami a tyto strany by byly ohodnoceny jedničkou.

Protože cesta mezi vrcholy a, c neexistuje, je grafová vzdálenost mezi těmito vrcholy rovná ∞ (Hliněný, 2008, s. 26).



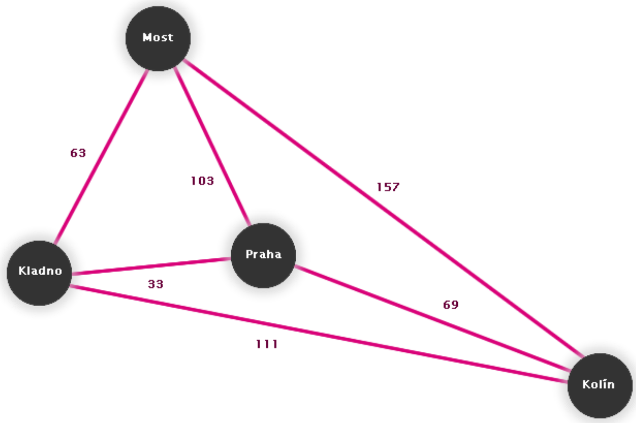
Obr. 3.1.1. – Vzdálenost v neohodnoceném grafu
(zdroj: http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf)

MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 121) definují vzdálenost v grafu následovně:

„Nechť G = (V, E) je souvislý graf. Pro jeho vrcholy v, v' definujeme číslo d_G (v,v') jako délku nejkratší cesty z v do v' v grafu G. Číslo d_G (v,v') se nazývá ***vzdálenost*** *vrcholů v a v' v grafu G.“*

3.2 Metrika grafu a její výpočet

V grafech znázorňujících situace z reálného světa, si s neohodnocenými hranami, tj. hranami, které mají jednotkovou délku, často nevystačíme. Aby nám dávaly grafy větší možnost popsat něco skutečného, např. že vzdálenost z Prahy do Kolína je určitě jiná než z Prahy do Kladna, pracuje teorie grafů s ohodnocenými grafy. V těchto grafech najdeme u každé hrany, která spojuje dva vrcholy, ještě číslo, které může reprezentovat např. už zmíněnou vzdálenost mezi městy (obr. 3.2.1).



Obr. 3.2.1 – Znázornění vzdálenosti mezi městy pomocí grafu
(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

Pod pojmem metrika grafu si můžeme představit soubor vzdáleností mezi všemi dvojicemi vrcholů grafu (Hliněný, 2008, s. 28). Metriku grafu na obr. 3.2.1 je zapsána v následující tabulce (tab. 3.2.1).

–	Most	Kladno	Praha	Kolín
Most	0	63	96	157
Kladno	63	0	33	102
Praha	96	33	0	69
Kolín	157	102	69	0

Tab. 3.2.1 – Metrika grafu
(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

Jak uvádějí MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 121), metrika grafu je funkce d_G: $V \times V \rightarrow R_0^+$ s těmito vlastnostmi:

„(nezápornost) $d_G\ (v,v') \geq 0$ a (totožnost) $d_G(v,v') = 0$ právě když $v = v'$

(symetrie) $d_G(v,v') = d_G(v',v)$ *pro každou dvojici vrcholů v, v'*

(trojúhelníková nerovnost) $d_G(v,v'') \leq d_G(v,v') + d_G(v',v'')$ *pro každou trojici v, v', v'' vrcholů z V."*

3.3 Hledání nejkratší cesty

Při hledání dopravního spojení, i v jiných praktických aplikacích, najdeme jednu ze základních algoritmických úloh v teorii grafů, tj. nalezení nejkratší cesty mezi dvěma danými vrcholy v daném grafu.

Najít nejkratší vzdálenosti mezi všemi dvojicemi měst v grafu na obr. 3.2.1 nebude tak těžké, protože se jedná o poměrně jednoduchý graf se čtyřmi vrcholy a šesti hranami.

Algoritmy, které byly doposud objevené a pomáhají při řešení úloh tohoto typu, počítají mnohem více, než zadání požaduje. Obyčejně najdou nejkratší cesty z daného vrcholu do všech ostatních vrcholů v daném grafu. Pokud se zdlouhavému počítání chceme vyhnout a zajímá nás jen nejkratší vzdálenost z jednoho vrcholu místo všech dvojic vrcholů, je vhodné použít tzv. Dijkstrův algoritmus (Matoušek a Nešetřil, 2009). Jeho zjednodušený popis najdeme v HLINĚNÉM (2008, s. 30):

„Je variantou procházení grafu, kdy pro každý nalezený vrchol ještě máme proměnnou udávající vzdálenost – délku nejkratšího sledu (od počátku), kterým jsme se do toho vrcholu zatím dostali. Z úschovny nalezených vrcholů vždy vybíráme vrchol s nejmenší vzdálenosti (mezi uschovanými vrcholy) – do takového vrcholu se už lépe dostat nemůžeme, protože všechny jiné cesty by byly dle výběru delší. Na konci zpracování tyto proměnné vzdálenosti udávají správně nejkratší vzdálenosti z počátečního vrcholu do ostatních."

4. Rovinné grafy

„Tři domky A, B a C stojí v řadě vedle sebe. Za nimi je umístěno společné sociální zařízení a společná studna. V zájmu dobrého soužití občanů je třeba každý z domků spojit s každým ze dvou zařízení tak, aby se cesty neprotínaly.“ (NEČAS, 1978, s. 9). Měla by úloha řešení, kdyby ke dvěma zařízením přibylo zařízení třetí – např. společná popelnice?

Nečas (1978, s. 49) popisuje, jak se dá tato úloha o třech domech a dvou, resp. třech zařízeních, převést do řeči teorie grafů. Uzly v grafu budou znázorňovat domy A, B, C a společná zařízení, hrany jsou cesty, kterými spojíme každý z domů s každým společným zařízením. Máme tedy co do činění s neorientovaným grafem a hledáme způsob, jak ho nakreslit v rovině tak, aby se jeho hrany neprotínaly.

Každý konečný graf, který reprezentuje určitou situaci z reálného života, lze nakreslit a jeho nakreslení nám pak může docela výrazně pomoct s přemýšlením. Přesuňme se od domků např. k člověku, který navrhuje jednovrstevné integrované obvody. Má hromádku odporů, kondenzátorů, tranzistorů… a tyto součástky potřebuje pospojovat tak, aby „to“ fungovalo. Jestliže si představíme jednotlivé součástky jako vrcholy a nutná propojení jako hrany, pracuje návrhář plošných spojů vlastně také s grafem, ve kterém by bylo křížení hran dokonce přímo nežádoucí. (Matoušek a Nešetřil, 2009, s. 188).

NEČAS (1978, s. 49) k problematice rovinného kreslení grafů uvádí:

„Graf, který lze znázornit v rovině tak, aby se jeho hrany neprotínaly, se nazývá rovinný nebo planární.“

Kromě uvedených úloh najdeme v reálném světě kolem nás ještě další příklady rovinných grafů. Např. mapy států. A rovinným grafem je i silniční síť ve městě, bez nadjezdů a podjezdů.

4.1 Nakreslení rovinného grafu

Výše uvedená Nečasova definice rovinného grafu napovídá, že pojem rovinného grafu je definován pomocí kreslení v rovině, tudíž geometricky.

K tomu, abychom mohli dokázat, že nějaký graf je rovinný, postačí, když předvedeme jeho jedno konkrétní rovinné nakreslení. Přesvědčit někoho, že daný graf rovinný není, je už mnohem složitější úkol. To, že budeme donekonečna zkoušet a řešení nenajdeme, by v matematice jako důkaz nestačilo. Abychom věděli jistě, že např. graf $K_{3,3}$ rovinný není, je potřebné uvést takový matematický důkaz, který bude zvažovat *„všechna možná nakreslení najednou“* (MATOUŠEK a NEŠETŘIL, 2009, s. 190).

Abychom lépe porozuměli slovnímu spojení nakreslení grafu, vracejí se MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 190) k jeho neformálnímu vysvětlení:

„Vrcholům grafu se přiřadí různé body v rovině a hrany se kreslí jako rovné nebo křivé čáry spojující odpovídající dvojice bodů.“

Matoušek a Nešetřil mluví o neformální „definici“, protože se v ní vyskytuje neformální, nedefinovaný, pojmem čára. Aby se vyhnuli problémům, který by mohl tento pojem při dokazování s sebou přinést, zabývají se Matoušek a Nešetřil (2009, s. 191) tím, že povolený způsob kreslení hran definují na základě přesných matematických pojmů oblouk nebo lomená čára.

„Oblouk je podmnožina roviny tvaru $\gamma = f([0, 1]) = \{ f(x); x \in [0, 1]\}$, kde $f : [0, 1] \rightarrow R^2$ je nějaké prosté spojité zobrazení uzavřeného intervalu [0, 1] do roviny. Přitom body $f(0)$ a $f(1)$ se jmenují koncové body oblouku γ“. (MATOUŠEK a NEŠETŘIL, 2009, s. 191).

„Nakreslením grafu G = (V, E) rozumíme přiřazení, které

- *každému vrcholu v grafu G přiřazuje bod b(v) roviny*
- *a každé hraně $e = \{u, v\} \in E$ přiřazuje oblouk γ(e) v rovině s koncovými body b(u) a b(v).*

Přitom předpokládáme, že

- *zobrazení b je prosté (různým vrcholům odpovídají různé body)*

– *a žádný z bodů tvaru b(v) není nekoncovým bodem žádného z oblouku γ(e) (hrany se vyhýbají vrcholům).*

Nakreslení grafu G = (V, E), v němž oblouky odpovídající různým hranám mají společné nanejvýš koncové body, se nazývá rovinné nakreslení. Graf G je rovinný, má-li alespoň jedno rovinné nakreslení.“

MATOUŠEKA a NEŠETŘIL (2009, s. 193) se dále zabývají pojmem lomenice, čímž mají na mysli *„lomenou čáru spojující dva body x a y v rovině, která je tvořena konečným počtem úseček a sama sebe neprotíná,“* a vysvětlují, že je tento matematický objekt jednodušší než oblouk, přestože je lomenice v podstatě jeho speciálním případem. Svoji myšlenku zdůvodňují tím, že lomenice *„sestává z konečně mnoha úseček.“*

Když pak v definici objasňující nakreslení grafu *G = (V, E)* vymění slovo oblouk za slovo lomenice, definují lomenicové nakreslení grafu a lomenicově rovinný graf.

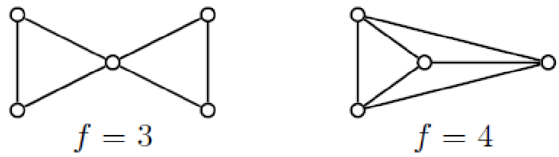
Přestože je kreslení pomocí lomenic vhodné pro rychlé a logicky přesné budování teorie rovinných grafů, MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 194) dodávají, že *„kreslení pomocí oblouků je definice elegantní, standardní a všeobecně přijatá. Všechna geometrická tvrzení, potřebná k vybudování teorie rovinných grafů byla řádně dokázána a důkazy jsou dostupné v literatuře.“*

4.2 Stěny grafu

Než se dostaneme k slavnému Eulerovu vztahu, jakožto jedinému základnímu kvantitativnímu vztahu pro rovinné grafy, je třeba vysvětlit, co budeme rozumět pod pojmem stěna.

„Nechť G = (V, E) je rovinný graf s daným rovinným nakreslením. Uvažme množinu všech bodů roviny, které neleží v žádném z oblouků nakreslení. Tato množina se rozpadne na několik souvislých oblastí. Tyto oblasti budeme nazývat stěny uvažovaného rovinného nakreslení grafu G.“ (MATOUŠEK a NEŠETŘIL, 2009, s. 202).

Protože i oblast rozprostírající se do nekonečna, vnějšek grafu, je část roviny, která je vymezena hranami daného rovinného grafu, budeme o ní uvažovat jako o vnější stěně nakreslení. Všechny ostatní souvislé oblasti se nazývají vnitřní stěny (obr. 4.2.1).



Obr. 4.2.1 – Stěny grafu

(zdroj: http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/dma/dmknih12.pdf)

4.3 Charakterizace rovinných grafů

Eulerův vzorec

Základní kvantitativní vztah pro rovinné grafy znal už Euler v roce 1752 a říká:

„Nechť *G = (V, E) je souvislý rovinný graf a nechť s je počet stěn nějakého rovinného nakreslení G. Potom platí* $|V| - |E| + s = 2$. *Speciálně počet stěn nezávisí na způsobu rovinného nakreslení.“* (MATOUŠEK a NEŠETŘIL, 2009, s. 203).

Eulerův vztah vypadá jednoduše, přesto z něj většina důkazů tvrzení o rovinných grafech vychází, ve větší či menší míře ho používá.

Maximální počet hran

Další důležitou vlastností rovinných grafů je to, že mohou mít jen poměrně málo hran.

„(i) *Nechť G = (V, E) je rovinný graf s aspoň třemi vrcholy. Potom* $|E| \leq 3|V| - 6$.“ (MATOUŠEK a NEŠETŘIL, 2009, s. 204).

„(ii) Neobsahuje-li uvažovaný rovinný graf trojúhelník (tj. K_3 jako podgraf) a má-li aspoň 3 vrcholy, potom $|E| \leq 2|V| - 4$.“ (MATOUŠEK a NEŠETŘIL, 2009, s. 205).

U Matouška a Nešetřila (2009, s. 205) nalezneme také důsledek vyplývající z předcházejících vět o maximálním počtu hran:

„Každý rovinný graf má nějaký vrchol stupně nejvýš 5. Každý rovinný graf bez trojúhelníků má vrchol stupně nejvýš 3.“

Kuratowského věta

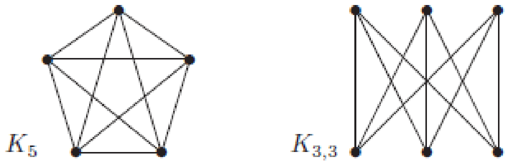
V části věnované nakreslení rovinného grafu se objevuje myšlenka, která zkoumá, jak dokázat, že nějaký graf je - není planární. K tomu, abychom dokázali, že nějaký graf planární je, úplně postačí, když najdeme jedno jediné jeho rovinné zobrazení. Ale jak dokázat, že graf planární není?

Kuratowského věta je vlastně nástroj, pomocí kterého se dá bez použití počítače prokázat nerovinnost libovolného nerovinného grafu.

„Graf G je rovinný, právě když žádný jeho podgraf není isomorfní dělení grafu $K_{3,3}$ ani dělení grafu K_5.“ (MATOUŠEK a NEŠETŘIL, 2009, s. 218).

Aby byla tato věta pro nás srozumitelnější, je třeba vysvětlit, proč se v ní mluví právě o grafech $K_{3,3}$ a K_5 (obr. 4.3.1) a přiblížit pojem dělení grafu.

Jak zmiňují Matoušek a Nešetřil (2009, s. 218), grafy $K_{3,3}$ a K_5 nejsou v Kuratowského větě náhodně. Potvrzuje to i HLINĚNÝ (2008, s. 89), když říká, se jedná o nejmenší nerovinné grafy a *„každý nerovinný graf jeden z nich obsahuje.“*



Obr. 4.3.1 – Grafy K_5 a $K_{3,3}$

(zdroj: http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf)

Graf $K_{3,3}$ je graf bez trojúhelníků se 6 vrcholy. Podle části (ii) věty o maximálním počtů hran rovinného grafu, by mohl mít, kdyby měl být rovinný, maximálně 8 hran, ale na obr. 4.3.1 vidíme, že jich má 9. Nerovinnost grafu K_5 plyne z části (i) téže věty. Podle ní by měl mít úplný graf s 5 vrcholy maximálně 9 hran, zatímco graf K_5 jich má 10 (Matoušek a Nešetřil, 2009, s. 218).

Dělením grafu se pak rozumí graf, který vznikne přidáváním vrcholů ne některé hrany (obr. 4.3.2).

Obr. 4.3.2 – Dělení grafu

(zdroj: http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf)

Z Kuratowského věty plyne, jak uzavírají problém rovinnosti resp. nerovinnosti Matoušek a Nešetřil (2009, s. 219), že k prokázání nerovinnosti libovolného nerovinného grafu postačí, když v něm najdeme nějaké dělení $K_{3,3}$ nebo K_5, tudíž věta vymezuje dvě „překážky rovinnosti."

4.4 Barvení map a problém čtyř barev

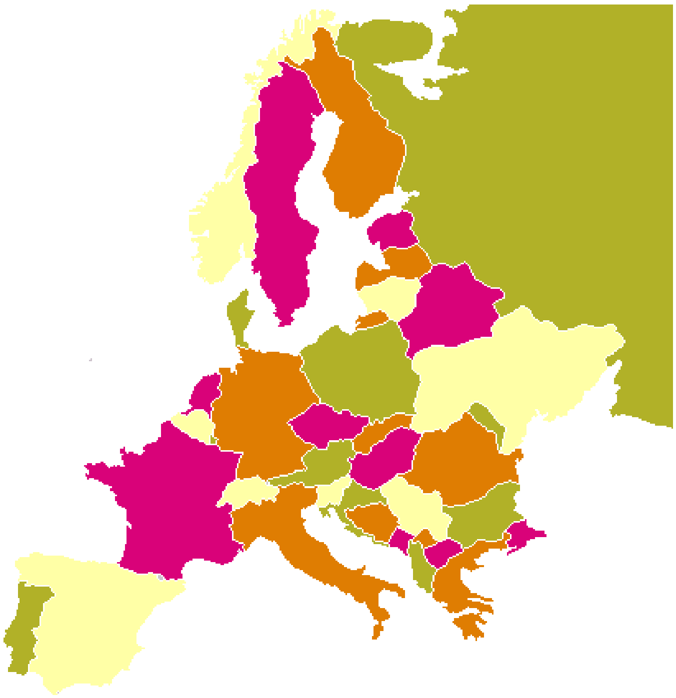
V roce 1852 se ve světě matematiků poprvé objevila otázka, jestli je možné obarvit libovolnou mapu v rovině či na kulové ploše pomocí čtyř barev. Po sedmi mostech se zrodil další z nejvýznamnějších matematických problémů a na rozdíl od sedmi mostů zůstal nevyřešený po více než 100 let. Podněcoval tak rozvoj teorie grafů po celá desetiletí (Šišma, 1997c, s. 169).

Hliněný (2008, s. 69) uvádí, že problém čtyř barev vzešel od výrobců map, kteří chtěli barevně odlišit sousední státy v politických mapách. A protože výrobci map chtěli tisknout mapy co nejlevněji, požadavek na co nejmenší počet barev se jevil celkem logický.

Co matematický svět řešil? Matoušek a Nešetřil (2009, s. 220) začínají popis úlohy u politické mapy (obr. 4.4.1). Vycházejí z předpokladu, že je každý stát souvislá oblast a její hranice tvoří nějaká topologická kružnice (schematická mapa na obr. 4.4.1 je bez ostrovů Sardinie, Sicílie, Korsika atd. a také bez Ruska, které bylo v době psaní publikace nesouvislým státem).

Obr. 4.4.1 – Schematická mapa Evropy (zdroj: Matoušek a Nešetřil, 2009, s. 220)

Autoři dále objasňují, že dvě oblasti se pokládají za sousední v případě, že mají společný alespoň kousek hranice. V případě, že se oblasti dotýkají jen v jednom nebo několika bodech, sousedními oblastmi nejsou. Při vybarvování mapy má být každý stát (oblast) vybarvený nějakou barvou tak, že sousedící státy nebudou vybarveny stejnou barvou. V závěru je položena otázka, která se ptá na počet barev, potřebných k vybarvení mapy za těchto podmínek a dodávají, že pro uvedenou mapu, jak ukazuje obr. 4.4.2, stačí čtyři barvy.



Obr. 4.4.2 – Politická mapa obarvena čtyřmi barvami
(zdroj: http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php)

MATOUŠEK a NEŠETŘIL (2009, s. 222), definují barevnost pro libovolný graf následovně:

„Buď G = (V, E) graf, k přirozené číslo. Zobrazení b: V → {1, 2, ... , k} nazveme obarvením grafu G *pomocí k barev, pokud pro každou hranu {x, y}* ∈ E *platí b(x) ≠ b(y). Barevnost grafu G, označovaná* $\chi(G)$*, je minimální počet barev potřebný pro obarvení G.“*

Můžeme tedy položit otázku: *„Jaké je nejmenší číslo k takové, že libovolný konečný graf lze obarvit k barvami?“* (HABALA, 2012, s. 20). Autor dál uvádí, že na konci 19. století bylo v matematických kruzích známo, že správná řešení jsou jenom dvě: *k* = *4* a *k* = *5*. Zatímco použití pěti barev se dokázat podařilo, druhé řešení zůstávalo pouze jako hypotéza až do roku 1976, kdy jej pánové Appel a Haken vyřešili (Šišma, 1997, s. 178). Jejich důkaz byl velmi obtížný a spočíval v probírání mnoha případů počítačem. Udělat důkaz ručně se zatím ještě nikomu nepovedlo udělat.

Část II - Prvky teorie grafu ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ

1. Zmapování současného stavu ve vybraných učebnicích matematiky

V návaznosti na předcházející části práce a s vědomím, že situací v reálném světě, na které se dá teorie grafů aplikovat, je celá řada, bych se chtěla v této kapitole zaměřit na nabídku úloh v učebnicích matematiky, které umožňují žákům 1. stupně základní školy získat v této oblasti matematiky nějaké zkušenosti.

K prostudování jsem si vybrala řady učebnic matematiky pro 1. až 5. ročník základní školy nakladatelství ALTER, SPN, Prodos a Nakladatelství Fraus. Tyto učebnice s oblibou používají učitelé 1. stupně na základní škole, kde učím.

Úloh obsahujících prvky teorie grafů, na které se moje hledání zaměřilo, jsem hodně nenašla. První z nich v učebnicích nakladatelství ALTER jsem objevila ve třetím díle učebnice pro 3. ročník v části Cestujeme po ČR (Blažková aj., 1995-2012, 3. roč., 3. díl, s. 56). Žáci pracují s mapou ČR, ve které mají zadaná města a vzdálenosti mezi jednotlivými městy. Mají si zvolit začátek a cíl cesty, pak popsat, kterými městy budou projíždět a kolik kilometrů ujedou. K procházení grafem - mapou je vybízí také otázka, kam by mohli dojet za půl hodiny či hodinu, jestliže ví, jakou průměrnou rychlostí se automobil pohybuje.

Ve druhém díle učebnice pro 4. ročník (Blažková aj., 1995-2012, 4. roč., 2. díl, s. 62) můžeme najít jednotažky. Nutno podotknout, že se při řešení této úlohy žáci nesetkají s možností, že by se obrázek jedním tahem nakreslit nedal, tudíž je obrázky tak, jak jsou zadané, nemotivují ke zkoumání podmínek, za kterých jednotažka sestrojit lze a za kterých nelze.

V řadě učebnic Čížkové, které vydalo Státní pedagogické nakladatelství, si žáci mohou ve 3. ročníku zkusit projít labyrintem (Čížková, 2008, s. 120). Labyrint si můžeme představit jako soustavu konečného počtu místností, ze kterých vycházejí chodby. Jestliže chodba spojuje dvě místnosti, můžeme v teorii grafů mluvit o místnostech sousedních, jestliže z místnosti vede jenom jedna chodba, označíme v teorii grafů tyto místnosti jako slepé. Pokud znázorníme místnosti jako vrcholy a chodby, které z nich vycházejí nebo je spojují, jako hrany, můžeme labyrint znázornit pomocí neorientovaného grafu, ve kterém hledáme cestu (Nečas, 1978, s. 41). Mé zkušenosti s úlohami podobného typu jsou velmi dobré. I když je děti řeší spíše metodou pokus – omyl, pokaždé je hledání cesty v bludišti zaujme.

V matematice pro 5. ročník základních škol autorek VACKOVÁ, FAJFRLÍKOVÁ A UZLOVÁ (2010, s. 88), kterou vydalo Státní pedagogické nakladatelství, najdeme problém čínského pošťáka (obr. 1.1) v části Chytrost nejsou žádné čáry:

„Pošťák Adam roznáší v Kocourkově poštu. Každý den musí navštívit pět místních obchodů. Přitom musí splnit tyto podmínky:

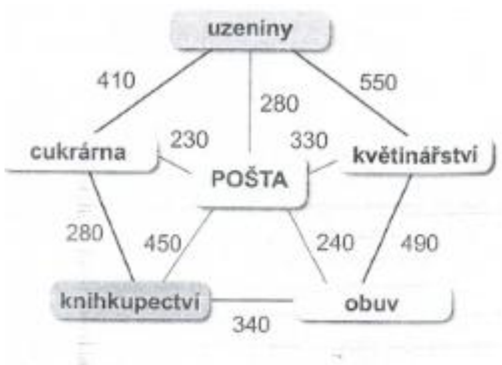
a) Začíná na poště a nejprve jde do květinářství a naposledy do cukrárny.

b) Do uzenin musí dříve než do obchodu s obuví.

c) Z knihkupectví nesmí rovnou do cukrárny.

d) Žádnou cestu nesmí použít dvakrát.

Zkus pro Adama najít nejkratší cestu. Kolik metrů přitom ujde? (Údaje v obrázku jsou udány v metrech.)“



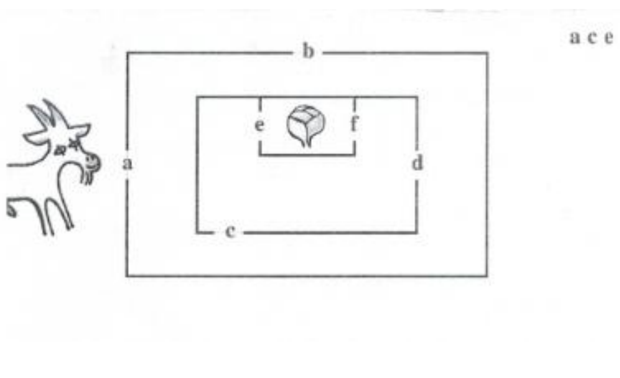
Obr. 1.1 – Ohodnocený graf k úloze o pošťákovi Adamovi v učebnici matematiky pro 5. ročník (zdroj: Vacková, Fajfrlíková a Uzlová, 2010, s. 88)

Molnár a Mikulenková (1993-1997) nabízejí dětem v učebnicích matematiky nakladatelství Prodos zkušenost s labyrintem už v 1. ročníku. Děti hledají domečky pro pejsky (obr. 1.2), zkoumají, které autíčko dojede do garáže, které klubíčko kočička rozmotá, snaží se vyvést z bludiště zvířátko, které nezná správnou cestu.

Obr. 1.2 – Bludiště v učebnici matematiky pro 1. ročník
(zdroj: Molnár a Mikulenková, 1993-1997, 1. roč., 1. díl, s. 8)

Ve třetím dílu je procházení labyrintem ještě zpestřeno sběrem hříbků. Cílem je projít lesem a sebrat jich co nejvíce (Molnár a Mikulenková, 1993-1997, 1. roč., 3. díl, s. 62).

V řadě učebnic Molnára a Mikulenkové (1993-1997) pro 2. ročník už můžeme v prvním dílu objevit jednotažky, ale obrázky k překreslení jedním tahem jsou zadané stejně jako u Čížkové (2008, s. 120). Všechny mají řešení. Ve třetím díle pak hledají žáci všechny cesty, kterými se může koza dostat k hlávce zelí, a pokoušejí se tyto cesty zapsat (obr. 1.3).

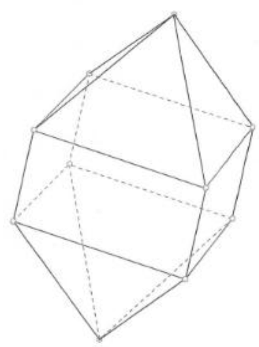


Obr. 1.3 – Úloha o koze a hlávce zelí (zdroj: Molnár a Mikulenková, 1993-1997, 2. roč., 3. díl, s. 42)

Ve třetím díle se poprvé setkávají s ohodnoceným grafem, jak ho chápe teorie grafů. Obce jsou znázorněny jako vrcholy, hrany představují cesty, které tyto obce spojují a žáci mají za úkol určit vzdálenost mezi obcemi podle zadání. Aby mohli úkol splnit, musí grafem procházet. V zadání není řečeno, že mají najít nejkratší cestu, takže mohou zjistit, že cesta ze Sylvína do Petrovic může být různě dlouhá. Záleží na tom, kterou cestu mezi obcemi zvolí (Molnár a Mikulenková, 1993-1997, 2. roč., 3. díl, s. 48).

Ve 3. ročníku zařadili Molnár a Mikulenková do učiva matematiky opět jednotažky a hledání cest v plánech měst, ale neomezují řešení podmínkou nalezení cesty nejkratší. Zajímavá je úloha v prvním dílu této řady. Žáci mají za úkol vybarvit mozaiku, tak *„aby žádná dvě sousední políčka nebyla vybarvena stejnou barvou“* (MOLNÁR a MIKULENKOVÁ, 1993-1997, 3. roč., 1. díl, s. 22). V zadání navíc tito autoři vyzývají děti k tomu, aby se při vybarvování snažily použít co nejméně barev. Žáci, tak získají první zkušenost s planárním grafem a v souvislosti s ním také s barvením map.

V řadě učebnic nakladatelství Prodos se dá také najít aplikace teorie grafů na geometrii těles. V učebnici matematiky pro 4. ročník základní školy najdeme úlohu, kdy mají žáci jedním tahem tužky projít všemi vrcholy tělesa (obr. 1.4), a to každým vrcholem právě jednou a mají se vrátit do výchozího vrcholu. V podstatě mají žáci najít uzavřený eulerovský tah (Molnár a Mikulenková, 1993-1997, 4. roč., 3. díl, s. 28).



Obr. 1.4 – Jednotažka na tělese (zdroj: Mikulenková a Molnár, 1993-1997, 4. roč., 3. díl, s. 28)

Na stejném místě se mohou žáci potkat i s úlohou, kterou známe v teorii grafů jako problém obchodního cestujícího. Pan Watson si potřebuje naplánovat obchodní cestu tak, aby byla co nejkratší. Začátek jeho obchodní cesty je v Londýně a měl by navštívit Atény, Barcelonu a Prahu.

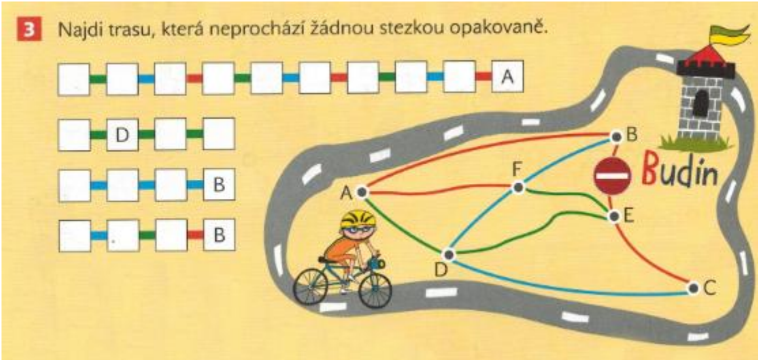
Ve třetím dílu učebnice pro 5. ročník se Molnár a Mikulenková vracejí k hledání cest v ohodnoceném grafu, když chtějí, aby žáci našli všechny možné cesty z nádraží v Kombinacích na hrad Elštejn a vypočítali jejich délky (Molnár a Mikulenková, 1993-1997, 5. roč., 3. díl, s. 39).

V Zajímavé matematice (nejen) pro páťáky nakladatelství Prodos seznamují Molnár a Mikulenková (1997, s. 30) žáky s problémem čtyř barev. Předkládají jim mapu Evropy a staví před ně úkol, aby se pokusili vybarvit co možná největší její část čtyřmi barvami, tak, aby žádné dvě sousední země Evropy nebyly vybarveny stejnou barvou.

Zatímco, v učebnicích nakladatelství ALTER a Státního pedagogického nakladatelství se objevují úlohy s využitím prvků teorie grafů jen málo a ve většině případu jenom jako úlohy pro zpestření výuky v rámci rozšiřujícího učiva, autoři učebnic matematiky Molnár a Mikulenková dávají možnost dětem získat zkušenosti s teorií grafů v mnohem větší míře. Lze odpozorovat, že postupují od jednoduššího ke složitějšímu, ale podle mého názoru jsou úkoly v učebnicích formulovány tak, že žáci mají jen malou možnost bádat a diskutovat o možných řešeních. Je na učiteli matematiky, aby svými vhodně položenými doplňujícími otázkami přivedl žáky k lepšímu porozumění problematiky práce s grafy.

Teorie grafů v učebnicích nakladatelství Nakladatelství Fraus ve spojení s kolektivem autorů pod vedením pana prof. Hejného už není jenom jako rozšiřující učivo, ale autoři s ní cíleně pracují. Ve svých učebnicích vytvořili specifické prostředí pod názvem Cyklostezky, které ve vyšších ročnících 1. stupně plynule přechází v řešení úloh o autobusových linkách. Jestliže žáci začnou s cyklostezkami pracovat, brzy zjistí, že se obtížnost úloh v tomto prostředí postupně zvyšuje a navíc je i o čem diskutovat. Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová (2007-2011) zastávají názor, že řešením úloh v tomto prostředí se rozvíjí schopnost a dovednost propojit algebraickou a geometrickou situaci, při prozkoumávání všech možných řešení se učí děti systematické práci a také vyvozování (Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová, 2007-2011, 2. roč., Příručka učitele, s. 12).

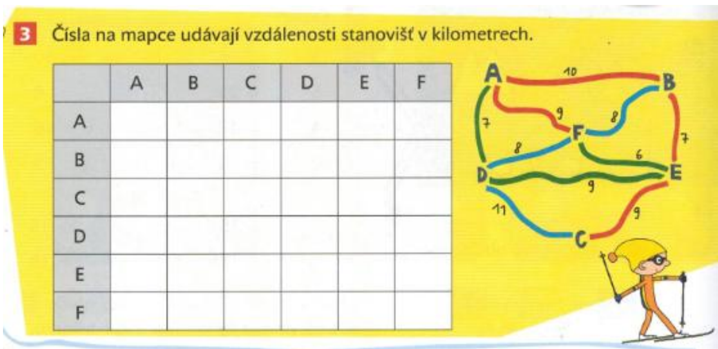
Už od 1. ročníku se v těchto učebnicích setkávají děti s labyrinty. Ve 2. ročníku se pak seznámí s cyklotrasou (obr. 1.5) a učí se ji procházet. Pracují s neorientovaným grafem, seznamují se s jeho vrcholy, postupují po jeho hranách. Aby bylo procházení grafem jednodušší, děti se pohybují po stezkách (hranách), které mají barevné označení. Doplňují názvy stanovišť, barvy cyklostezek, a dokonce hledají trasu bez opakování stezek.



Obr. 1.5 – Mapa cyklotras

(zdroj: Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová, 2007-2011, 2. roč., 1. díl, s.27)

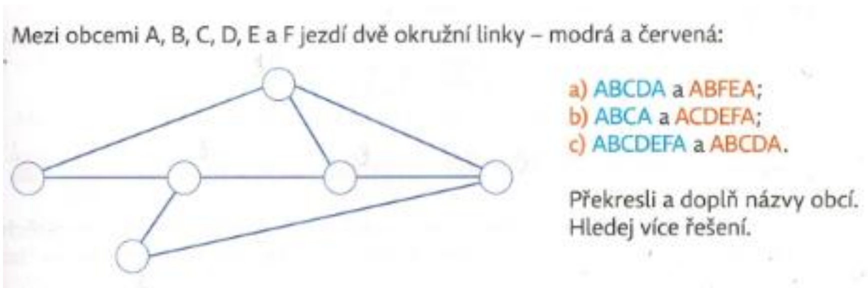
Pak se seznámí s ohodnoceným grafem a počítají metriku grafu (obr. 1.6), tz. sestavují tabulku vzdálenosti, cílem které je podle autorů *„modelování virtuální situace grafem; rozvíjení porozumění vazbě mezi procesem (běh na lyžích) a konceptem (mapka souboru stanovišť),“* (Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová, 2007-2011, 2. roč., Příručka učitele, s. 110).



Obr. 1.6 – Ohodnocený graf a jeho metrika

(zdroj: Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová, 2007-2011, 2. roč., 2. díl, s.32)

Poté řeší úlohy o autobusových linkách, doplňují do mapky obcí názvy obcí, kterými autobusová linka projíždí. Když hledají řešení, nejdříve postupují metodou pokus – omyl a při zkoušení přijdou na to, že některé obce sousedí se dvěma dalšími obcemi, jiné se třemi, ale také objeví, že existují obce, které mají souseda pouze jediného. Zrodí se tak myšlenka konečné zastávky a větvení.



Obr. 1.7 – Mapa autobusových linek (zdroj: Hejný, Jirotková a Slezáková-Kratochvílová, 2007-2011, 5. roč., s. 19)

V učebnicích pro 3., 4. i 5. ročník se zadání úloh o cyklostezkách a autobusových linkách opakují. Žáci hledají trasy podle zadání, doplňují názvy stanovišť, pracují s kyvadlovou a okružní autobusovou linkou. Náročnost se zvyšuje, mění se obrázek.

Grafy se v řadě učebnic vytvořených skupinou autorů sdružených kolem pana prof. Hejného didakticky využívají také při řešení úloh z prostředí Výstavišť, Mostů, Hadů a Pavučin.

Závěr

Po zmapování vybraných učebnicových řad je možno vyvodit zajímavý závěr. I když se s nimi nepotkáváme na každé stránce, autoři se jim nevyhýbají a dětem je nabízejí. Z teorie grafů se v učebnicích matematiky, které jsem srovnávala v souvislosti s tématem mé práce, objevuje především procházení grafu, hledání eulerovských tahů, hamiltonovské kružnice a výpočet metriky grafu. Při jejich řešení mohou tak žáci získat některé specifické znalosti a dovednosti. Pracují s orientovaným i neorientovaným grafem i s grafem ohodnoceným, učí se orientovat v rovině, rozvíjí se jejich algoritmické myšlení, učí se porozumět jednoduchým kombinatorickým situacím a v nemalé míře také sčítají a odčítají, tzn. vhodně ohodnocený graf může posloužit i k zajímavému procvičení jednoduchých početních operací.

2. Série gradovaných úloh

Každý učitel matematiky se občas ocitne v situaci, kdy zjistí, že se úlohy, které nabízí učebnice nebo pracovní sešit k upevňování a procvičování učiva daného tematického celku v podstatě opakují. Když dá dětem navíc vzor, který je ke správnému řešení dovede, děti začnou tyto úlohy řešit i bez toho, aby jim porozuměly. Při respektování všech kroků nabídnutého algoritmu je řešení úlohy ve většině případů snadné a rychlé, což může vyhovovat všem jedincům, kteří jsou ve výuce orientovani na výsledky. Při takovém způsobu vzdělávání se sice rozvíjí paměť, ale myšlení žáků stagnuje a podněty, které by rozvíjely žákovu tvořivost, jsou minimální. Připravuje se tak úrodná půda pro vzklíčení formalismu ve vzdělávání (Hejný a Kuřina, 2009, s. 193).

Mnoho učitelů matematiky začíná přemýšlet, jak toto riziko formalismu co nejvíce omezit. Ukazuje se, že jednou z cest by mohlo být nabízení úloh s narůstající obtížností. Zhouf (2004, s. 312) zastává názor, že se při zavádění i následném procvičování nějakého matematického pojmu dají v konstruktivisticky vedených hodinách matematiky využívat gradované úlohy.

Při řešení gradovaných úloh budují žáci své poznání tím, že diskutují o objevech, ke kterým přicházejí při řešení drobných problémových situací, postupně zobecňují, a tím, že porovnávají různé výsledky, docházejí k objevům závěrečným. Edukační cíl tohoto postupu najdeme u JIROTKOVÉ (2004, s. 216):

- *„usměrnit objevitelský proces žáků/studentů,*
- *dát jim možnost zažít pocit radosti z konkrétních výsledků a uspokojení z dílčích výsledků i závěrečného objevu,*
- *povzbudit jejich matematické sebevědomí,*
- *rozvíjet jejich kauzální myšlení,*

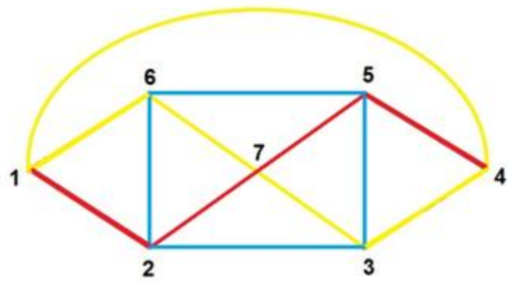
- *rozvíjet jejich pocit zodpovědnosti za volbu cesty k poznání nových pojmů a vztahů,*
- *dát jim vhled nejen do struktury geometrie, ale i aritmetiky a zejména do vzájemné propojenosti těchto struktur.“*

Cesty v grafu ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy

Sérii gradovaných úloh jsem řešila s žáky 3. ročníku, kteří neměli s úlohami podobného typu žádnou zkušenost. Mým cílem bylo přivést je k přemýšlení o podmínkách, za kterých se dá obrázek nakreslit jedním tahem bez zvednutí tužky z papíru. Vybrala jsem tento prvek teorie grafů proto, aby žáci získali zkušenost s otevřeným i uzavřeným eulerovským tahem a se situací, kdy tato úloha řešení nemá.

Úloha č. 1 – modelování reálné situace grafem

Poté řeší úlohy o autobusových linkách, doplňují do mapky obcí názvy obcí, kterými autobusová linka projíždí. Když hledají řešení, nejdříve postupují metodou pokus – omyl a při zkoušení přijdou na to, že některé obce sousedí se dvěma dalšími obcemi, jiné se třemi, ale také objeví, že existují obce, které mají souseda pouze jediného. Zrodí se tak myšlenka konečné zastávky a větvení.



Obr. 2.1 – Mapa lesoparku (zdroj: vlastní)

Děti se těší na dětský den v lesoparku. Dozvěděly se, že bude připraveno sedm stanovišť, cesty mezi jednotlivými stanovišti budou pro lepší orientaci barevně označeny. Dostaly mapu (obr. 2.1).

Na stanovišti č. 1 je turnaj ve cvrnkání kuliček. Na stanovišti č. 2 si mohou děti zaskákat na trampolíně. Na stanovišti č. 3 si mohou půjčit kolečkové brusle. Na stanovišti č. 4 se hraje loutkové divadlo. Na stanovišti č. 5 si mohou děti vyzkoušet triky s fotbalovým míčem. Na stanovišti č. 6 se skáče přes švihadlo. Na stanovišti č. 7 je připraveno občerstvení.

Katka se rozhodla, že vyrazí po červené, Martin po modré a Pavel po žluté stezce. Napiš (řekni), která stanoviště děti postupně navštíví.

Pozorování: Seznámení se s grafem, myšlenka stupně vrcholu

Žáci obdrželi zadání úlohy a začali zkoumat obrázek. Nejdříve se zajímali o stanoviště. Prošli postupně všechna stanoviště a začali se zabývat otázkou sousedů. Bylo pro ně důležité zjistit, kam se mohou vydat, když si např. zaskáčou na trampolíně (ukázka toho, jak se děti mladšího školního věku ještě opírají o realitu) a objevili čtyři směry. Po trampolíně (stanoviště č.2) mohou jít cvrnkat kuličky (stanoviště č. 1), mohou si jít zaskákat přes švihadlo (stanoviště č. 6), mohou si jít zabruslit (stanoviště č. 3) nebo se mohou občerstvit (stanoviště č. 7). Tahle myšlenka žáky zaujala ještě více poté, co zjistili, že z některých stanovišť vede menší počet cest a že se např. od trampolíny nedostanou k divadlu bez toho, aby neprošli jiným stanovištěm. Chvíli takhle prozkoumávali každý vrchol grafu zvlášť.

Protože při formulaci svých myšlenek žáci nepoužívali číselné označení jednotlivých stanovišť, ale říkali „u švihadel, u trampolíny, u kuliček“, změnili jsme číselné označení stanovišť na tabuli za obrázkové a později jsme použili k označení vrcholů grafu písmena (1 → K, 2 → T, 3 → B, 4 → D, 5 → F, 6 → Š, 7 → O). Na moji otázku, jestli jsme změnou označení nezměnili také úlohu, bez velkého přemýšlení odpověděli, že ne. Objevila se myšlenka, že změna v označení stanovišť nic neprovedla se stezkami a že úloha je vlastně pořád stejná.

Pak už děti neměly problém popsat, jak se pohybovala Katka, Martin a Pavel, a zajímavý byl i postřeh, že pokud to jsou kamarádi a každý si půjde svou cestou, tak se vlastně nemohou všichni tři potkat na jednom stanovišti.

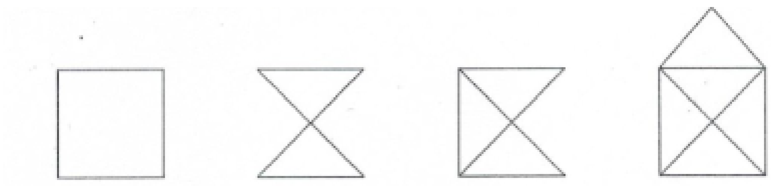
Úloha č. 2 – kreslení jedním tahem, nalezení otevřeného eulerovského tahu

Zadání první situace: Lucka chce projít celý areál lesoparku. Myslíte si, že je možné, aby ho prošla tak, že projde po každé stezce právě jednou?

Pozorování: Hledání jednotažky a spor

Nejdříve děti řešily problém, kde začít. V zadání žádnou podmínku neobjevily, takže začaly zkoušet. Většina z nich začala vrcholem K. Toto rozhodnutí zřejmě vzešlo ze zkušenosti se čtením a psaním, kdy při práci s textem postupují zleva doprava. Našli se mezi nimi i tací, kteří zvolili vrchol T, jako bod, který jim je nejblíže, bod ležící na základně. Pak vznikl mezi dětmi spor o tom, jestli Lucka lesoparkem projde bez opakování stezek, nebo neprojde. Jeho řešení vedlo k dalšímu zkoušení a formulaci nového problému.

Jaký vliv má umístění prvního stanoviště na to, jestli Lucka lesoparkem za daných podmínek projde? Aby děti mohly uvažovat, bylo jim třeba poskytnout další materiál. Nabídla jsem jim jednodušší obrázky (obr. 2.2).



Obr. 2.2 – Kreslení lomených čar jedním tahem
(zdroj: Molnár a Mikulenková, 1993-1997, 2. roč., 1. díl, s. 46)

U prvních dvou obrázku byly všechny děti úspěšné a vyslovily hypotézu, že poloha stanoviště, kterým jednotažku začínají, není důležitá. K zajímavé debatě došlo u třetího obrázku v řadě. Když si chtěly své tvrzení ověřit, najednou se zase setkaly s případem, kdy jednotažku nesestrojily a nemohly použít argument, že je jeden z vrcholů nejvíc vlevo. A tak začaly pozorněji zkoumat vlastnosti vrcholů (stanovišť) a přišli na to, že na poloze vrcholu v obrázku nezáleží, když z každého z nich vedou dvě cesty. Jestliže chtějí nakreslit jedním tahem obrázek, ve kterém jsou stanoviště, do kterých vchází nebo z kterých vychází lichý počet cest, musí začít právě tam.

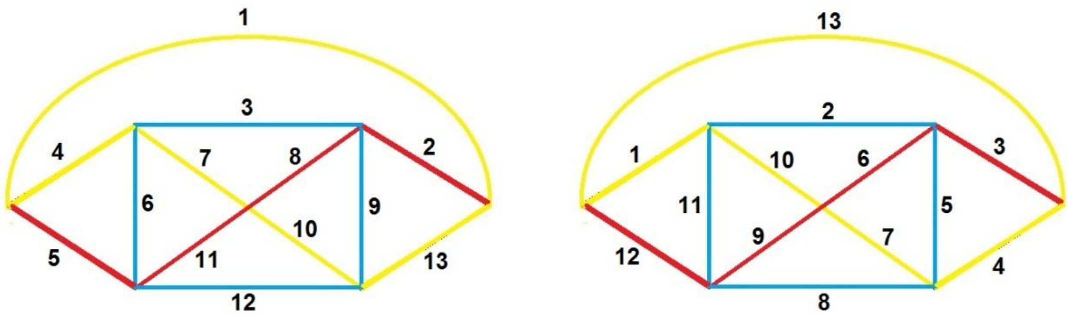
Zadání druhé situace: Myslíte si, že by mohla Lucka projít všemi stezkami v lesoparku právě jednou, navštívit všechna stanoviště a zároveň by pravidelně střídala barvy stezek?

Pozorování: Zkušenost s kombinatorikou

Žáci začali zkoušet, v jakém pořadí se mohou barvy střídat. Kreslili si barevné puntíky v pořadí

- červená, modrá, žlutá, červená, modrá...
- červená , žlutá, modrá, červená, žlutá...
- modrá, červená, žlutá, modrá, červená...
- modrá, žlutá, červená, modrá, žlutá...
- žlutá, modrá, červená, žlutá, modrá...
- žlutá, červená, modrá, žlutá, červená...

Protože žáci měli k dispozici 5 žlutých stezek, 4 modré a 4 červené, objevila se myšlenka, že by měla Lucka začít žlutou stezkou, protože „jinde to nevyjde“. Možná řešení žáků ukazuje obr. 2.3.



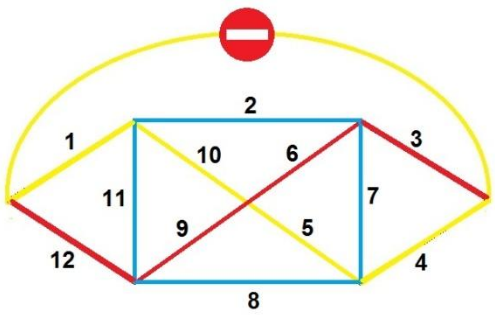
Obr. 2.3 – Ukázky řešení úlohy č. 2 (zdroj: vlastní)

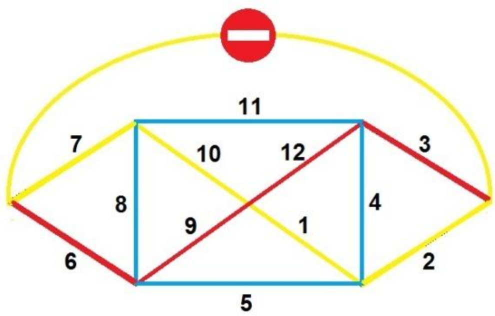
Úloha č. 3 – kreslení jedním tahem, objevení uzavřeného eulerovského tahu

Zadání: V noci byla bouřka. Na stezce, která spojuje stanoviště K a stanoviště D popadaly stromy. Projde Lucka celým lesoparkem tak, aby prošla každou stezkou právě jednou?

Pozorování: Objevení myšlenky, že cesta může začít i skončit na jednom stanovišti

Žáci opět zkoušeli a hledali možná řešení. Tentokrát k žádnému sporu mezi nimi nedošlo, protože se jim povedlo z každého stanoviště jednotažku najít. Překvapilo je ale zjištění, že pokaždé skončí tam, kde začali. Využili předcházející zkušenosti a počítali cesty vcházející a respektive vycházející ze stanovišť. Vyslovili hypotézu: „Když vychází z každého stanoviště sudý počet cest, je jedno, kde začneme, jednotažku pokaždé najdeme a vrátíme se na stanoviště, v kterém jsme cestu začali.“ Některá řešení jsou na obr. 2.4.





Obr. 2.4 – Ukázky řešení úlohy č. 3 (zdroj: vlastní)

Úloha č. 4 – procházení všemi stanovišti, druhé setkání s kombinatorikou

Zadání: Lucka chce navštívit všechna stanoviště, ale každým chce projít jenom jedenkrát. Rozhodla se, že své odpoledne začne cvrnkáním kuliček a jako poslední by chtěla vidět loutkové divadlo. Maminka ji ale poprosila, aby se uprostřed svého putování po lesoparku občerstvila. Navrhni Lucce všechny možnosti, jak si může své odpoledne v lesoparku naplánovat.

Pozorování: Po zjištění, že stanovišť, kterými má Lucka projít, je sedm, usoudily děti, že stanovištěm s občerstvením by měla Lucka projít jako 4. v řadě a našly např. tato řešení:

- K – Š – F – O – T – B – D
- K – Š – T – O – F – B – D
- K – T – Š – O – F – B – D

Objevily i situaci, kdy nebude mít úloha řešení:

- K – Š – F – O – B, protože se od trampolíny nedostanou k divadlu bez toho, aby ještě jednou neprošly přes brusle,

– K – T – B – O – F, protože se od švihadel nedostanou do divadla bez toho, aby neprošly podruhé přes fotbal.

Kdybychom změnili podmínku, která upravuje konec cesty, a chtěli bychom, aby se Lucka vrátila tam, kde svou cestu začala, žáci by řešili problém hamiltonovské kružnice.

Závěr série gradovaných úloh

Pro vyučujícího není tento způsob výuky zrovna jednoduchý, protože od něj vyžaduje, aby byl hodně trpělivý, nenabízel řešení, ale pokládal otázky a usměrňoval žáky v jejich bádání. Protože se řeší úlohy s narůstající obtížnosti, žáci mají radost i z menších úspěchů, ke kterým se mohou dopracovat jednoduchou metodou pokus – omyl. Chyba se zde vyskytuje jako edukační nástroj a přivádí děti k hlubšímu porozumění. Děti řeší spory dalším experimentováním, systematizují svá pozorování a hledají argumenty, kterými by svá tvrzení podpořily. Učí se své závěry formulovat. Ukázky řešení jsou k nahlédnutí v přílohách č.1 - č.4.

3. Úlohy k procvičení

V návaznosti na mapování úloh s využitím prvků teorie grafů z vybraných učebnic matematiky pro 1. stupeň základní školy jsem sestavila ukázkové pracovní listy, které jsou k nahlédnutí v přílohách č. 5 až č. 9. V přílohách č. 10 až č. 14 jsou ukázky vyřešených pracovních listů. V úlohách děti získají zkušenost s prací s grafy neorientovanými, orientovanými i ohodnocenými, vybarvováním map a výpočtem metriky. Výpočet metriky může posloužit i k procvičení sčítání v učitelem zvolených číselných oborech.

Pracovní listy jsem použila ve výuce v jednotlivých ročnících. Kromě dětí z 2. a 3. třídy neměli žáci, kteří s pracovními listy pracovali, žádnou zkušenost s grafovými úlohami, kromě jednotažek. V 1. třídě jsem dětem nejdříve nabídla neorientované neohodnocené grafy s pěti vrcholy bez křížení hran a sestavila jsem úlohy, ve kterých se děti učily v obrázcích orientovat. Děti řešily úlohy lehce a při řešení nedocházelo ke sporům, které by bylo třeba společnou diskusí řešit. Pak jsem jejich pohyb po obrázku omezila zadáním směru a v další úloze jsem hrany ohodnotila.

V úloze s čepičkou (1. ročník 2. pololetí, úloha č. 1) se nejdříve děti domlouvaly, jestli mají obtahovat i sluníčko. Z řešení žáků (příloha č. 10) je vidět, že zkoušeli obtahovat obrázek celý, ale pak gumovali a obtahovali jenom čepičku. Ve druhé úloze jsem přidala počet vrcholů, děti si stěžovaly, že *„je tam hodně domečků"*. Kvůli jednotažce jsem záměrně připravila graf se všemi vrcholy sudého stupně, aby bylo každé dítě na konci práce motivováno úspěchem.

V úlohách pro 2. ročník jsem ztížila obtížnost přidáním rovnoběžných hran a hran, které se „kříží". Při řešení jsme narazili na problém, jak odlišit cestu mezi vrcholy B a G a mezi vrcholy D a F, když mezi nimi existují dvě přímá spojení. Děti se nakonec domluvily, že *„jednu cestu můžeme značit rovnou čárkou a tu druhou, která vypadá jako oblouček, napíší jako oblouček"* (příloha č. 11). V dalších úlohách, které řešili žáci druhého ročníku, jsem záměrně nepřidávala žádné omezující podmínky, chtěla jsem úlohy zaměřit spíše tvořivě. Někdo našel jednu cestu, jiný dvě i více. Úlohu, ve které hledali nejkratší cestu, řešili spíše intuitivně a moc nepočítali. Proto jsem tuto úlohu ve druhém pololetí rozšířila o tabulku.

Ve 3. třídě využívali žáci zkušenosti s gradovanou úlohou popsanou v části II, kapitole 2. a pracovali samostatně. Opět nejdříve s neorientovaným grafem, pak s grafem, ve kterém byl zakázán vstup na jednu z cest a také s grafem ohodnoceným. Novou zkušenost jim přinesla úloha s orientovaným grafem. Museli se více soustředit a ve vrcholech se zdrželi déle než při práci s grafem neorientovaným, protože v grafu prohledávali i dvě – tři cesty dopředu. Tato úloha se jim líbila.

Při navrhování tras pro cyklistu jsme s žáky 4. ročníku nejdříve řešili otázku místa, z kterého bude cyklista vyjíždět. Nechala jsem na dětech, ať si to místo zvolí. S neorientovaným ohodnoceným grafem problém neměly. Myslím si, že by bylo dobré zvýšit obtížnost této úlohy tím, že by se mohlo přidat barevné označení cest nebo některé ze stezek by mohly být označeny jako jednosměrky. Protože jsem věděla, že tyto děti nemají s grafovými úlohami žádnou zkušenost, zvolila jsem jednodušší variantu, abych je od těchto úloh neodradila. Cestování v grafu s ohodnocenými hranami posloužilo k procvičení sčítání a co bylo hodně zajímavé, brzy poté, co začali někteří žáci na tabulce vzdálenosti pracovat, objevili, že těch příkladu nebude moc, *„protože je tabulka zrcadlová".*

Než jsem rozdala žákům v 5. třídě pracovní listy, nejdříve jsme na tabuli společně vyřešili několik úloh na nakreslení obrázku jedním tahem bez zvednutí tužky z papíru, pak jsem je nechala pracovat samostatně. Návrh obrázku zvládli, ale když jsem chtěla, aby ho nakreslili ještě jednou, přišli na to, že s tím mají problém, protože si své cesty nezapisovali. Objevili myšlenku, že je důležité si cestu zapsat. Pokud bych jim zadávala podobnou úlohu ještě jednou, bylo by potřebné zadání rozšířit o informaci, že mají každou cestu použít právě jednou a také uvést požadavek, aby své řešení zapsali.

Závěr z realizace úloh k procvičení

Zadání, ve kterém jsem měla připravit pracovní listy na procvičení grafových úloh, jsem v podobném rozsahu připravovala poprvé. Je pro mne mnohem jednodušší, když s dětmi provádím experiment, protože při něm mohu změnou zadání úlohy bezprostředně reagovat na to, co se ve třídě v hodině odehrává.

Co je potěšující, děti přijaly úlohy s využitím grafů velmi dobře a zjišťovaly, jestli budou ještě další. Práce s obrázky je bavila a hodiny byly velmi živé.

Část III - Experiment se dvěma barvami

1. Experiment ve výuce

Pořád se něco děje. Svět kolem nás se neustále měn a učitelé už dnes vědí, že si ve výuce nevystačí s metodami a formami práce, na které jsou zvyklí ze svých školních let. S měnícími se potřebami společnosti se přirozeně mění i charakteristiky žáků, do školních lavic usedají děti s jinými vzdělávacími potřebami, než tomu bylo před pěti či deseti lety.

Nejnovější trendy ve vzdělávání se vydávají cestou badatelsky orientované výuky, která vychází z konstruktivistických teorií. Konstruktivistický přístup k vyučování je založený na přesvědčení, že učení je dynamický proces, ve kterém musí být žáci aktivními účastníky. Kuřina (2002, cit. dle STEHLÍKOVÁ., 2004, s. 13) zastává názor, že pro konstrukci v matematice je typické *„aktivní vytváření části matematiky v mysli žáka. Podle povahy žáka může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém, ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé."*

Matematické objevování, které je založeno na řešení úloh, žáky motivuje a baví. Podle Novotné (2004, s. 358) žáci pak mohou lépe porozumět látce. Využívání dovedností a znalostí, kterými disponují z dřívějška, je podněcuje k tomu, že získávají pocit zodpovědnosti za to, co se sami učí. Ze srovnání transmisivního a badatelsky orientovaného vyučování v matematice podle Stehlíkové (Hejný aj., 2004, s. 19) plyne, že pokud se učitel vydá cestou badatelsky orientované výuky v matematice, může dospět k tomu, že žáci nebudou jenom pasivně přijímat a ukládat vědomosti do své paměťové struktury, ale naopak, když dostanou příležitost s učivem pracovat, své vědění si sami konstruují.

Zkušenosti se zařazováním bádání do hodin matematiky přivedly Novotnou (Hejný aj., 2004, s. 359) k formulování základních etap procesu objevování ve vyučování matematice:

- nesystematické poznávání situace,
- systematické zkoumání,
- tvorba hypotéz,
- vysvětlování nebo prokazování.
- rozvinutí situace,
- shrnutí.

V průběhu bádání žáci kladou otázky, zkoumají informace, vytvářejí hypotézy, shromažďují údaje, a poté by měli formulovat i nějaké závěry. Základním úkolem učitele je podle HEJNÉHO a KUŘINY (2009, s. 193) *„motivovat žáky k aktivitě."* Učitel by měl vést vhodnými otázkami žáky k tomu, aby dokázali formulovat svoje vlastní myšlenky, nápady, názory, čímž se nastartuje jejich konstruktivní poznávací proces. *„Žáci si vytvářejí vlastní představy a budují si vlastní poznatkovou strukturu“,* dodávají autoři (2009, s. 193). Je tady zřejmé, že badatelsky orientovaná výuka vyžaduje nový způsob zapojení žáka do učení.

K empirickým metodám badatelsky orientované výuky patří spolu s pozorováním a měřením také experiment.

2. Tři fáze experimentu s dvěma barvami

2.1 Fáze přípravná

S matematikou se potkáváme denně, téměř na každém kroku. I když to bylo pro děti ze třetí třídy překvapující, setkaly se s ní dokonce v hodině výtvarné výchovy, kdy měly za úkol vytvořit mozaiku s detailem obrysu své ruky uprostřed pracovní plochy. Výkres rozdělený na malé dílky pak měly vybarvit pastelkami, přičemž jediná podmínka, kterou měly respektovat, bylo rozdělení barev na teplé a studené.

Podle toho, jak se zhostily úkolu, bylo vidět, že se s mozaikou nesetkávají poprvé. S rozdělením plochy si nedělaly žádné starosti, otázky se začaly vynořovat až ve chvíli, kdy začaly vybarvovat. Většinou se týkaly vhodnosti používaných odstínu pastelek. Protože se dotazy stejného typu opakovaly, diskusi jsem ukončila větou: *„Bylo by možná zajímavé zjistit, jaký je nejmenší počet pastelek, s kterým byste si vystačily za podmínky, že žádné dva sousední dílky nevybarvíte stejnou barvou.“* A že to byla pro některé zvídavé děti výzva, bylo poznat podle toho, že se ve třídě rozhostilo alespoň na chvíli ticho.

Každý si s úlohou poradil, jak uměl. Než zazvonilo na přestávku, už děti hlásily počet pastelek. Největší obdiv získali Mikuláš a Tobiáš (obr. 2.1.1), kteří použili jenom dvě teplé a dvě studené barvy.

Obr. 2.1.1 – Obrázek Mikuláše a Tobiáše z hodiny výtvarné výchovy

Ve třídě bylo tento den dvacet jedna dětí. Když jsme na koberci uspořádali výstavku hotových obrázků, nemohli jsme si nevšimnout, že některá dílka mají něco společného. Na jedenácti z nich děti rozeznaly jistý druh šachovnice, která byla vytvořená ze šikmých rovných čar (obr. 2.1.2). Autorkami sedmi z nich byly dívky a čtyři vytvořili chlapci.

Obr. 2.1.2 – Obrázek Matyáše a Nikoly z hodiny výtvarné výchovy

Ne všichni, kteří s „pravidelným“ dělením výkresu formátu A4 začali, vydrželi s pravidelností až do konce. Před dokončením návrhu pět z nich sebralo odvahu a změnili polohu jedné nebo několika čar. Šachovnice prý pro ně přestala být „zajímavá“, a tak se pokusili symetrii a pravidelnost šachovnicového vzoru narušit (obr. 2.1.3).

Obr. 2.1.3 – Obrázek Lukáše a Ondry z hodiny výtvarné výchovy

Deset žáků se pustilo do experimentování od samotného začátku a z čar vytvářeli jakýsi „chaos“ (obr. 2.1.4). Obrázky bez symetrie a pravidelností byly plné napětí, jak to s vybarvováním dopadne. To, že je mozaika navržena správně, tj. splňuje podmínky zadání, není na první pohled zjevné. Přesto desítka dětí, která se cestou hledání jiných možností řešení vydala, představovala téměř polovinu všech přítomných žáků.

Obr. 2.1.4 - Obrázek Vládíka a Mirka z hodiny výtvarné výchovy

Za zmínku stojí, že si všichni, až na Mirka, ať už dělili prostor pravidelně, či ne, vystačili s přímými rovnými čárami, které začínaly a končily na okrajích výkresu. Poté, co takto výkres rozdělili, umístili do něj obrys ruky.

Když jsem přemýšlela, proč tomu asi tak je, vzpomněla jsem si na zkušenost s nácvikem rýsování přímek z hodin geometrie. Vedla jsem tehdy děti k tomu, aby se nebály a rýsovaly přímky v různých polohách. Přímky se pak vzájemně protínaly a na stránce se začaly objevovat trojúhelníky, čtyřúhelníky apod.

Rovinné útvary jsme pak vybarvovali, např. všechny trojúhelníky žlutou pastelkou, čtyřúhelníky modrou atd. a mozaika byla na světě.

Mikulášovy a Tobiášovy „dvě a dvě“ pastelky, se kterými si při vybarvování obrázku vystačili, odstartovaly několika hodinovou práci plnou experimentování a ověřování. Jak vytvořit mozaiku na výkrese A4 tak, aby se nám všem povedlo to, co klukům, abychom při barvení navržené mozaiky použili právě dvě barvy, a přitom aby každý dílek mozaiky sousedil s dílkem jiné barvy. Ještě jednou jsem formulovala východiska a v jejich duchu děti v experimentování pokračovaly. Slavnou úlohu, kterou v teorii grafů známe jako problém čtyř barev, jsme s třeťáky zúžili na problém dvou barev.

Cílem následujícího školního experimentu bylo pozorovat, jak děti strukturují rovinu. Zajímalo mě, jaké bude jejich vnímání a tvoření vzorů v rovině, jak přemýšlejí před tím, než začnou kreslit, jaký je vztah mezi mentálními reprezentacemi vzorů a samotnou realizací, jak budou k realizaci přistupovat a v neposlední řadě také jak budou průběh experimentu verbalizovat.

2.2 Fáze realizační

Děti byly postavené před nové zadání. Abychom předešli různým interpretacím slovního spojení sousední dílky**,** bylo si třeba ujasnit, které dílky budeme za sousední považovat. Nejjednodušší cesta k porozumění vedla přes zahrady. Výsledek domluvy byl jednoznačný. *„Za sousední zahrady (dílky) budeme považovat ty, které mají společný plot nebo jeho část.“*

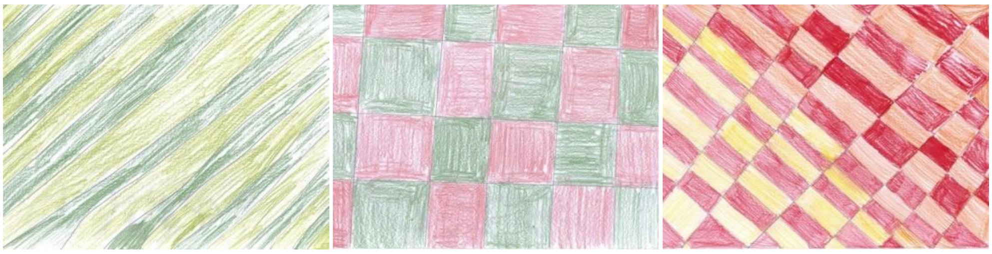
Při argumentaci požívali řečníci svojí „dětskou“ řeč a někteří se pokoušeli dokonce pojmenovávat popisované útvary a jevy i pomocí termínů z geometrie: přímka, rovinný útvar, strana, úsečka, vrchol, bod a zjistili, že na obrázku, který nakreslil Míra, jsou dokonce polopřímky a úsečky.

V diskusi nad obrázky se objevil i názor, že za sousední dílky bychom neměli považovat ty případy, ve kterých mají dva dílky společný právě jeden bod, když se dotýkají špičkou, tj. když mají společný jenom jeden vrchol.

Po této chvilce teorie, děti začaly s navrhováním svých mozaik, které by už měly respektovat podmínky nového zadání. Chvíli pracovaly samostatně nebo ve dvojicích, pak své nápady prezentovaly.

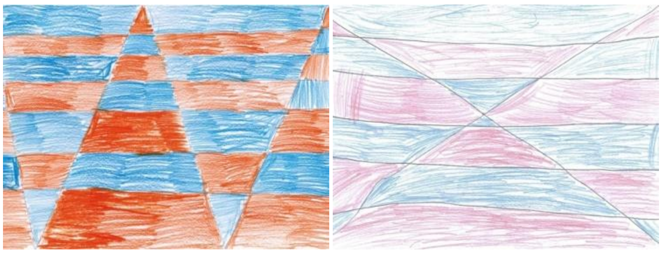
Nejdříve se na tabuli objevily šikmé nebo vodorovné proužky a bylo vidět, jak se děvčata snaží při črtání čar dodržet alespoň přibližně stejné vzdálenosti, které zřejmě lahodily jejich estetickému cítění, smyslu pro pořádek a řád (obr. 2.2.1). Skutečnost, že se dvě čáry neprotnou, jim dávala jistotu správného řešení. Pak se objevilo téměř periodické zakřivení čar, ale princip proužku byl zachován. Pocit jistoty a klidu přinesl i motiv šachovnice (obr. 2.2.2).

Obr. 2.2.1 – Klárka při řešení úkolu



Obr. 2.2.2 – Mozaika Hedviky, Nely a Evy

Bezpečnou půdu pod nohama děti opustily ve chvíli, kdy protnuly šikmé nebo vodorovné proužky čárami, které začínaly a končily na protilehlých okrajích výkresu a poprvé se v obrázku potkaly i dva dílky, které měly společný pouze jeden vrchol (obr. 2.2.3).

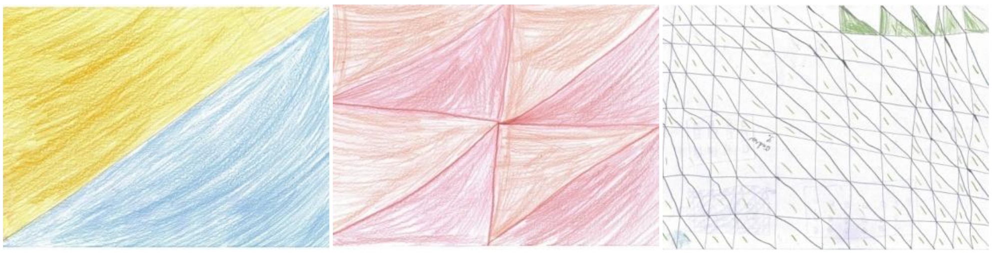


Obr. 2.2.3 – Mozaika Lukáše a Nikoly

Všechny zaskočila Terezka K, která rozdělila výkres úhlopříčkou na dvě poloviny a argumentovala tím, že ví, že když rozdělí obdélník na tyto dvě části, bude se dát obrázek obarvit dvěma pastelkami určitě. Její spolužáci ocenili toto jednoduché řešení a začali zkoušet dělení výkresu na stále menší poloviny (obr. 2.2.4 a obr. 2.2.5).

Teď přišel čas na otázku, která mohla děti podle mého názoru posunout o kousek dopředu. Zajímalo mě, jak jinak by se dal ještě výkres na dvě části rozdělit a jestli jsou poloviny nutnou podmínkou pro vybarvení obrázku dvěma pastelkami. Geometrická představivost se nastartovala a výsledek byl více než zajímavý. Děti přišly na to, že mohou pracovat s různými druhy čar, že mohou použít jak čáry přímé, tak i lomené nebo křivé. Míra S. přišel s tím, že umí nakreslit čáru, která nebude začínat a končit u okraje výkresu, ale že bude celá uvnitř v obrázku jako „fontána uprostřed parku“, a přesto výkres na dvě části rozdělí. Na tabuli nakreslil kružnici. Sklidil všeobecné uznání. Později jeho uvažování rozšířil Mikuláš K. dokonce o uzavřenou lomenou nebo křivou čáru (obr. 2.2.6).

Obr. 2.2.4 – První dělení roviny



Obr. 2.2.5 – Mozaika Terezky, Karolínky a Ondry

Obr. 2.2.6 – Mikuláš, Simonka, Mirek a Lukáš při řešení úkolu

Náš návod, jak navrhnout mozaiku tak, aby k jejímu obarvení stačily dvě pastelky, se děti rozhodly doplnit o větu, která říká, že nezáleží na druhu čar, které k rozdělení výkresu použijeme.

První část našeho experimentování uzavřel Mirek: *„Paní učitelko, ono to vlastně ani nezáleží na tom, jakou čáru nakreslíme, ale jak ji dáme a kam ji dáme.“* což přivedlo děti na myšlenku vzájemné polohy čar v rovině.

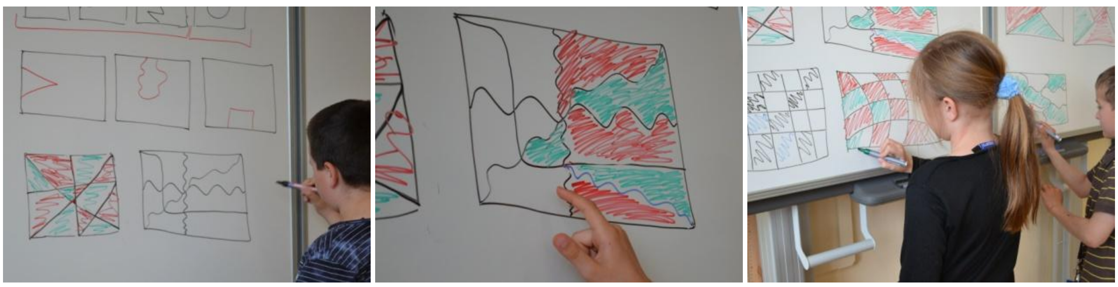
Práce na návrzích pokračovala hned příští den. Nejdříve si děti prohlédly obrázky a fotografie, které dokumentovaly dosavadní práci a vrátily se k Mírově hypotéze o vzájemné poloze čar.

Objevil se problém. Děti na něj narazily poté, co jsem se zeptala, kterým směrem by se naše zkoumání mělo dál vydat, a ony se rozhodly, že to co už ví o čárách, by mohly použít při dělení výkresu na tři části. Pro lepší orientaci jsme obrázky na tabuli očíslovali a děti začaly zkoumat, proč návrhy pod čísly 2 a 13 nevedly k úspěšnému řešení.

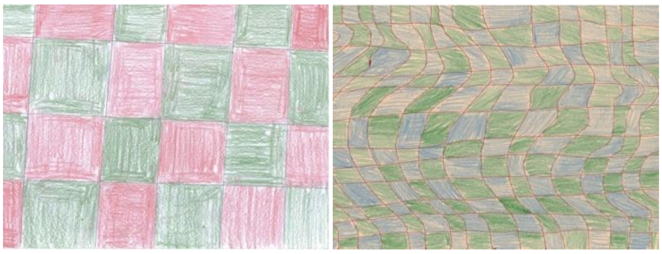
Děti přišly na to, že mozaiku nelze vybarvit dvěma barvami, když k rozdělení použijí čáru, která nezačíná nebo nekončí na některém z okrajů výkresu, ale na jiné čáře uvnitř navrhované mozaiky. Na těch zbylých obrázcích je vidět, jak se zpočátku vyhýbaly křížení čar. Všechny ty přímé, lomené či křivé čáry, kružnice nebo kružnicové oblouky se míjely, neměly na ploše vymezené výkresem společný žádný bod, ale úspěch byl zaručený (obr. 2.2.7).

Obr. 2.2.7 – Závěr první hodiny bádání

V návaznosti na tuto zkušenost chtěly „dětskou kuchařku s receptem na vypracování návrhu mozaiky“ podle zadání děti rozšířit o další myšlenku o čárách končících uvnitř mozaiky. Následovala celá řada návrhů, na kterých pracovaly individuálně nebo později i ve skupinách. Používaly postupy, které jim umožnily zdůraznit některý z prvků, o nichž jsme už v průběhu experimentu mluvili. Např. přímé rovné čáry, které většinou začínaly, nebo končily na libovolné straně výkresu. Od rovných čar přecházeli autoři návrhů k čárám zakřiveným (obr. 2.2.8). Jestliže čáry, které děti využívaly, začínaly a končily na stranách protilehlých, vznikaly obrázky založené na principu šachovnic (obr. 2.2.9), které zůstaly šachovnicemi, i když se čáry začaly různě deformovat.



Obr. 2.2.8 – Experimentování s různými druhy čar



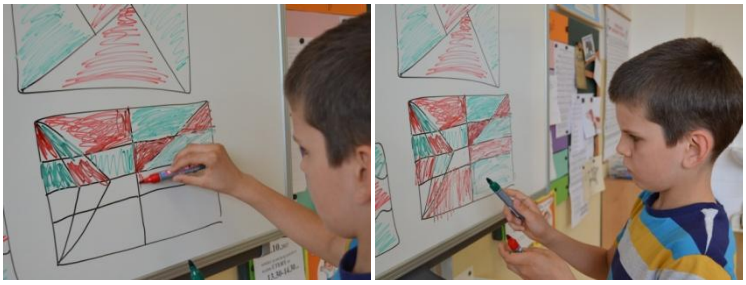
Obr. 2.2.9 – Princip šachovnice

V jiné skupině obrázku zaměřila především děvčata svojí pozornost na kružnice (obr. 2.2.10). Dívenky vysvětlovaly, že své návrhy začaly tím, že nejdříve rozmístily na ploše výkresu kružnice, a až poté ho rozdělovaly čárami. Co se týká rozmístění kružnic, tak na obr. 33 je patrná snaha o osovou souměrnost a na obr. 34 využívala dívka při vybarvování symetrii. Na těch dalších obrázcích jsou už kružnice nebo jiné uzavřené lomené či lomené čáry umístěné náhodně.

Návrhy mozaik byly stále lepší, ale žádné nové myšlenky se už neobjevovaly. Děti usoudily, že vše potřebné k sepsání pravidel objevily a nabízela se možnost experimentování nějakým způsobem uzavřít.

Obr. 2.2.10 – Prvek kružnice v mozaice

„Já jsem na něco ještě přišel. Jenom si to musím ještě spočítat,“ ozval se Ondra a na tabuli nakreslil poslední síť (obr. 2.2.11).



Obr. 2.2.11 – Ondrův objev

Ondra kreslil jednu čáru za druhou, pořád počítal a průběžně své počítání vyhodnocoval. Závěr „tady to je dobře“, byl signálem, aby přidal další čáru. Bylo to nesmírně napínavé. Zaměřil se na průsečíky čar. Ukázal na bod uprostřed výkresu a zklamaně řekl, že tady mu to nevyjde, protože kolem toho bodu je lichý počet dílků a určitě se mu tam někde potkají dva dílky, které bude muset vybarvit stejnou pastelkou. Říkal, že si všiml, že „aby to vyšlo“, musí být kolem průsečíku sudý počet dílku.

V závěrečné prezentaci děti popisovaly, jak při vytváření návrhů postupovaly. K překvapení všech se objevil další důkaz, že když se použije čára, která končí uvnitř výkresu na jiné čáře, mozaika se podle zadání vybarvit nedá, protože je „kolem toho bodu lichý počet dílků“. Stačila drobná nepozornost a setkala se dvě políčka stejné barvy, čímž zadání nebylo splněno (obr. 2.2.12).

Obr. 2.2.12 – Práce s chybou

2.3 Fáze hodnoticí (diskuse)

V průběhu experimentu se ukázalo, že děti postupovaly dvěma způsoby. Jedna skupina preferovala uspořádanou strukturu, její průhlednost a klid se zaručeným výsledkem. Ta druhá se pouštěla do zkusmého řešení problému, pro který ještě není znám algoritmus, metodou pokus a omyl. Hledání strategií a zkoušení bylo pro tyto děti mnohem přitažlivější, než jistota správně navržené sítě na první pokus. Byli motivování potřebou „přijít věci na kloub“, tj. porozumět věci a pochopit podstatu.

Když jsme s bádáním začali, byly děti rozděleny v poměru 11:10, ve prospěch skupiny, pro které je zřejmě charakteristická subjektivní kreativita. Tyto děti pracovaly s nějakou známou skutečností a tím, že ji uspořádaly, získaly novou kvalitu. Např. když si dítě hraje doma s kostkami a staví z nich věž nebo dům, vznikne něco nového, ale stavba z kostek má předlohu v něčem, co už bylo zbudováno někým jiným, využívá svět, který už zná. Ve výsledku vytvářely v průběhu experimentu tyto děti symetrické, klidné mozaiky ve výtvarném i topologickém smyslu. Druhá skupina, děti s objektivní kreativitou, se praxí inspirovala, ale ve výsledku se od ní dokázala odpoutat. Vytvářela sítě nové, méně pravidelné, ale o to zajímavější. Její cesta objevování byla plná překvapení.

Zpočátku jsem si nebyla jistá, jestli třeťáci toto téma, které spadá do teorie grafů a algoritmů, zvládnou. Využila jsem Terezčino rozdělení výkresu na dvě poloviny a záměrně jsem problém v prvních fázích hledání jeho řešení zjednodušila. Objev týkající se různých druhů čar a Mirkova kružnice dala křídla jejich geometrické představivosti. Jak sami v závěrečné reflexi říkali, když někdo něco „chytrého“ vymyslel a ukázal, tak to pak zkoušeli použít a postupně vytvářeli z jejich pohledu složitější a zajímavější mozaiky a bádání je více bavilo.

Je pravdou, že jejich jazyk geometrie ještě nebyl dokonalý, ale své domněnky, hypotézy a tvrzení se pokoušeli formulovat v rámci svých možností co nejvýstižněji. Když jim došly přesné termíny, definice nahradil popisný jazyk a kreslení.

Samozřejmě, že jsem dětem nezapomněla říct o praktickém využití úlohy, kterou jsme společně řešili. Mluvila jsem o barvení map, o jednotažkách a cyklostezkách, o algoritmech. I když je pro ně pojem teorie grafů ještě hodně vzdálený, není důvod, proč bychom se měli podobným úlohám v hodinách matematiky vědomě vyhýbat v přesvědčení, že se jedná o úlohy z oblastí rekreační matematiky.

Jak vytvořit mozaiku na výkres A4 tak, abychom si vystačili se dvěma pastelkami, a přitom každý dílek takto vytvořené mozaiky by sousedil s dílkem jiné barvy?

V průběhu experimentu jsem byla svědkem toho, jak se při řešení úlohy z matematického prostředí může nematematický a matematický svět vzájemně prolínat. Naše bádání jsme začali motivací v nematematickém prostředí, v hodině výtvarné výchovy, a s využitím matematických prostředků jsme se dopracovali k nematematickému cíli. A naopak, využitím nematematických prostředků jsme dosáhli cíle, který jsme formulovali v matematickém prostředí.

Objevitelská činnost děti motivovala k tomu, aby vytvářely stále nové a nové mozaiky. František Kuřina (2009, s. 15) píše o otázkách, které jsou projevem zájmu žáka. Rodí se při řešení úloh, hledání postupů, souvisí s vytvářením pojmů a poznáváním smyslu, ale také s použitím poznatků.

Začali jsme tím, že jsme se ptali, CO TO JE. Pak děti hledaly odpovědi na JAK a PROČ. Vytvořily velké množství návrhů. V některých ověřovaly, v jiných hledaly. Posouvaly se dopředu po drobných krůčcích tak dlouho, až přišel Mirek se svojí „modrozelenou kuchařkou“ (obr. 2.3.1) a řekl: *„Já to tady mám všechno, paní učitelko“.* Měl to všechno.

Obr. 2.3.1 – Řešení s použitím všech prvků

Závěr

Teorie grafů jako součást diskrétní matematiky je poměrně mladá matematická disciplina. Sousloví diskrétní matematika nepatří k těm, se kterými se ve své učitelské praxi na 1. stupni základní školy setkáváme běžně a její složitý teoretický základ v nás může vzbuzovat opodstatněný respekt.

Když jsem se rozhodla pro toto téma, hledala jsem literaturu, která by mi ho nějak lidsky přiblížila. Dostala se mi do rukou kniha J. Nečase Grafy a jejich použití z roku 1978 a byla jsem překvapena, kde všude může teorie grafů najít své uplatnění. Ze svých školních let si pamatuji úlohu o převozníkovi, koze, vlkovi a kupce sena, nějaké úlohy o nádobách a labyrinty, a to většinou jako zadání pro řešitelé matematických olympiád. Ze srovnání několika řad učebnic matematiky napsaných pro 1. stupeň základní školy vyplývá, že se autoři většiny z nich věnují práci s grafy jenom okrajově, i když vlastní uplatnění teorie grafů je široké.

Při práci na teoretické části jsem řešila pomyslný střet mezi složitostí teorie a dítětem mladšího školního věku. Pomohly mi děti z mé třetí třídy, když jsem pozorovala jejich experimentování s mozaikou. S nadšením a zaujetím pro práci vytvářely opakovaně nové návrhy a zkušenosti, které při této činnosti postupně získávaly, je přes drobné výhry dovedly k velkému objevu. Ještě několik týdnů po ukončení experimentu se dvěma barvami se mi chlubily svými výtvory, které z domu přinášely.

Cílem této práce nebylo popsat celý teoretický základ, na kterém je teorie grafů postavena, ale vybrat ty části, ve kterých bychom se jako učitelé matematiky mohli pohybovat při tvoření a následném zařazování úloh obsahujících prvky teorie grafů ve vyučování matematice u dětí na 1. stupni základní školy. Jedná se především o cesty v grafech, hledání uzavřeného i otevřeného eulerovského tahu, hamiltonovské kružnice, výpočet metriky grafu, jeho procházení a také vybarvování rovinných grafů.

Tím, že se budou žákům při zavádění některých matematických pojmů z této oblasti nabízet úlohy s narůstající obtížností, mají děti možnost získávat, a v návaznosti na to i využívat nové zkušenosti. Jejich bádání je pak zdrojem mnohých diskusí a často se může stát, že žáci samotni formulují otázky, které se při řešení úloh vynoří. Ty pak řeší a tím, že postupně zobecňují, budují své poznání založené na porozumění.

Při počítání metriky grafů a hledání nejkratší cesty v grafu se v nemalé míře mohou tyto úlohy využít i k netradičnímu procvičování učiva z aritmetiky a děti získávají i zkušenosti s kombinatorikou.

Matematika základní školy je postavená na řešení úloh. Vytvořené pracovní listy jsou ukázkou, jak se s teorií grafů ve vyučování matematiky dá na 1. stupni pracovat.

Fantazie dítěte mladšího školního věku jde ruku v ruce s jeho tvořivostí. Nabídněme dítěti obrázek, postavme ho před konkrétní problém a vhodnými otázkami posouvejme a rozvíjejme jeho myšlení.

Použitá literatura a internetové zdroje

BLAŽKOVÁ, R. aj. *Matematika (1.-5.ročník)*. Praha: ALTER, 1995-2012.

ČÍŽKOVÁ, M. *Matematika pro 3. ročník základních škol*. Praha: SPN a. s., 2008.

HABALA, P. Grafy [online, cit. 16.6.2014]. 2012.
Dostupné z <http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/dma/dmknih12.pdf>

HEJNÝ, M. a KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* 2. vydání. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika - učebnice pro základní školy (1. - 5. ročník)*. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2007-2011.

HLINĚNÝ, P., 2008. *Teorie grafů* [online, cit. 16.6.2014].
Dostupné z <http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf>

HORDĚJČUK, V. *Teorie grafů* [online, cit. 16.6.2014].
Dostupné z <http://voho.cz/wiki/matematika/graf/>

JIROTKOVÁ, D. Konstruktivistický přístup k vyučování geometrii. In HEJNÝ, M. aj. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: UK-PedF, 2004. ISBN 80-7290-189-3, stať ve sborníku, s. 213-235.

JIROVSKÝ, L. *Teorie grafů* [online, cit. 16.6.2014]. 2010.
Dostupné z <http://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/isomorfismus.php>

KUŘINA, F. O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*. 2002, roč. 31, č. 1, s. 1-8. (pozn. sekundární citace)

MATOUŠEK, J. a NEŠETŘIL, J. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* 4. vydání. Praha: Karolinum, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4. Kapitola 4, Grafy: úvod, s. 111-154. Kapitola 6, Rovinné kreslení grafů, s. 187-231.

MOLNÁR, J. a MIKULENKOVÁ, H. *Matematika – učebnice pro základní školy (1.-5. ročník)*. Olomouc: Prodos, 1993-1997.

MOLNÁR, J. a MIKULENKOVÁ, H. *Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky.* Olomouc: Prodos, 1997.

NEČAS, J. *Grafy a jejich použití.* 1. vydání. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1978. Typové číslo L 11-E1- IV-31/32 140. Kapitola 1, Některé klasické úlohy, s. 9-41. Kapitola 2, Rovinné grafy, s. 49-64. Kapitola 3, Ohodnocené grafy, s. 69-109.

NOVOTNÁ, J. Matematické objevování založené na řešení úloh. In HEJNÝ, M. aj. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: UK-PedF, 2004. ISBN 80-7290-189-3, stať ve sborníku, s. 357-366.

Sedm mostů města Královce [online, cit. 16.6.2014].
Dostupné z <http://cs.wikipedia.org/wiki/Sedm_mostů_města_Královce>

STEHLÍKOVÁ, N. Konstruktivistické přístupy ve vyučování matematice. In HEJNÝ, M. aj. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: UK-PedF, 2004. ISBN 80-7290-189-3, stať ve sborníku, s. 11-22.

ŠIŠMA, P. *Teorie grafů, 1736-1963.* Praha: Prometheus, 1997a. Kapitola 1, Cesty v grafech, s. 13-29.

ŠIŠMA, P. *Teorie grafů, 1736-1963.* Praha: Prometheus, 1997b. Kapitola 5, Orientované grafy, s. 91-100.

ŠIŠMA, P. Problém čtyř barev. In BEČVÁŘ, J. a FUCHS, E. *Historie matematiky II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8.1995.* Praha: Prometheus, 1997c. Stať ve sborníku, s. 169-180.

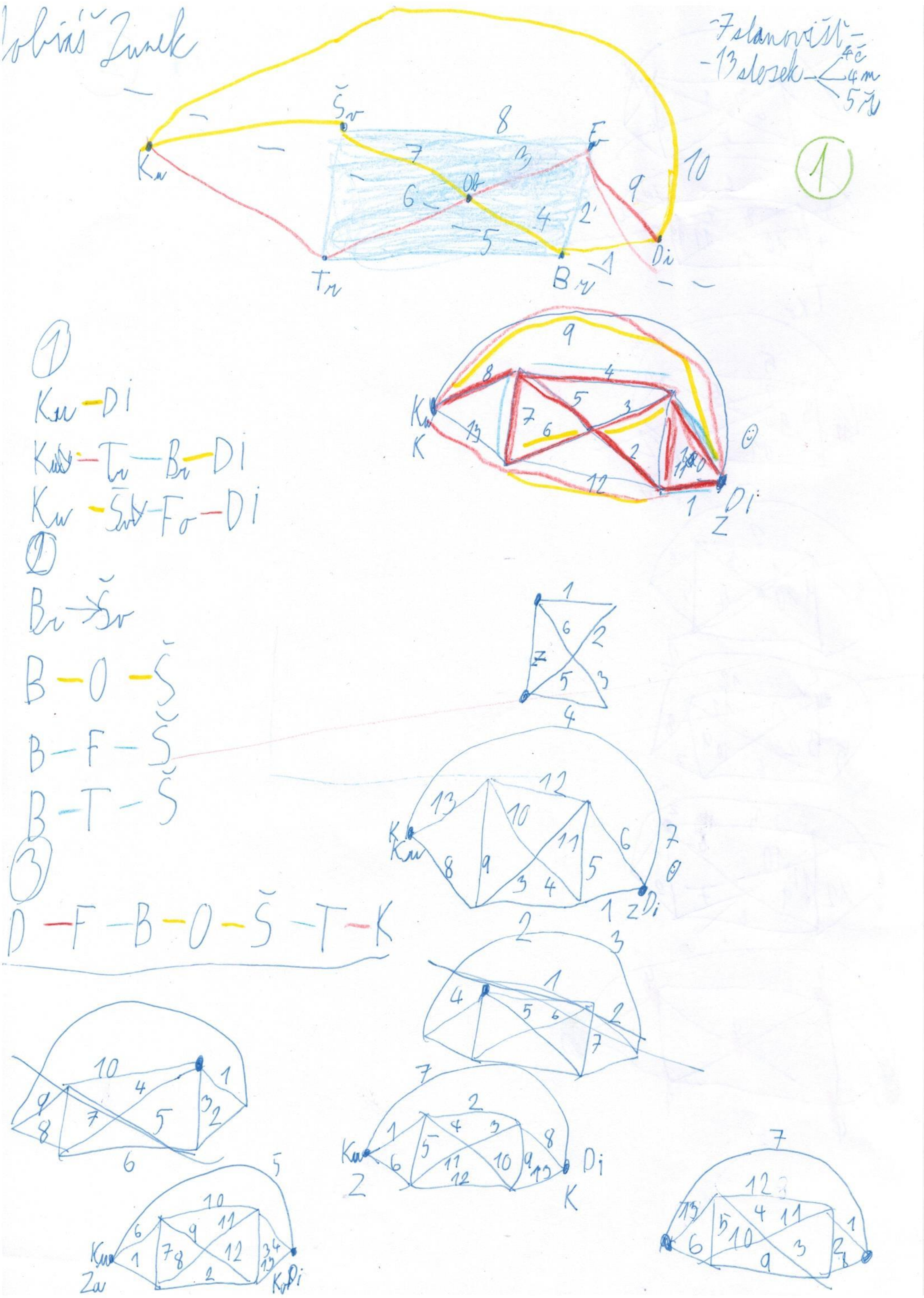
ŠIŠMA, P. Vznik a vývoj teorie grafů. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 1998, roč. 43, č. 2, s. 89-99.

VACKOVÁ, I., FAJFRLÍKOVÁ, L., a UZLOVÁ, Z. *Matematika pro 5. ročník základních škol.* Praha: SPN a.s., 2010.

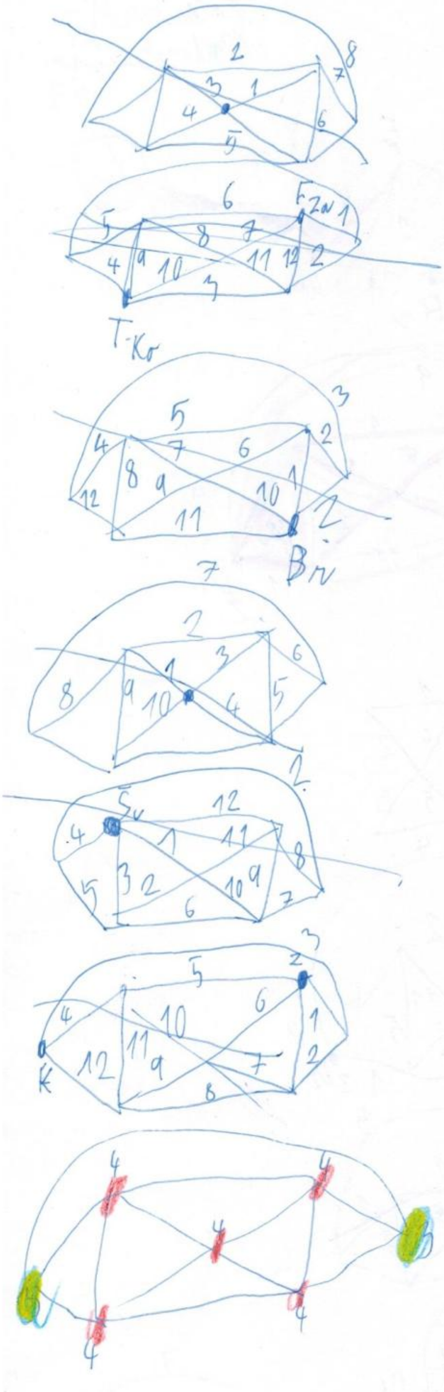
ZHOUF, J. Tvorba diagnostických úloh z matematiky. In HEJNÝ, M. aj. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: UK-PedF, 2004. ISBN 80-7290-189-3, stať ve sborníku, s. 311-322.

Příloha č. 1

Řešení série gradovaných úloh – Tobiáš



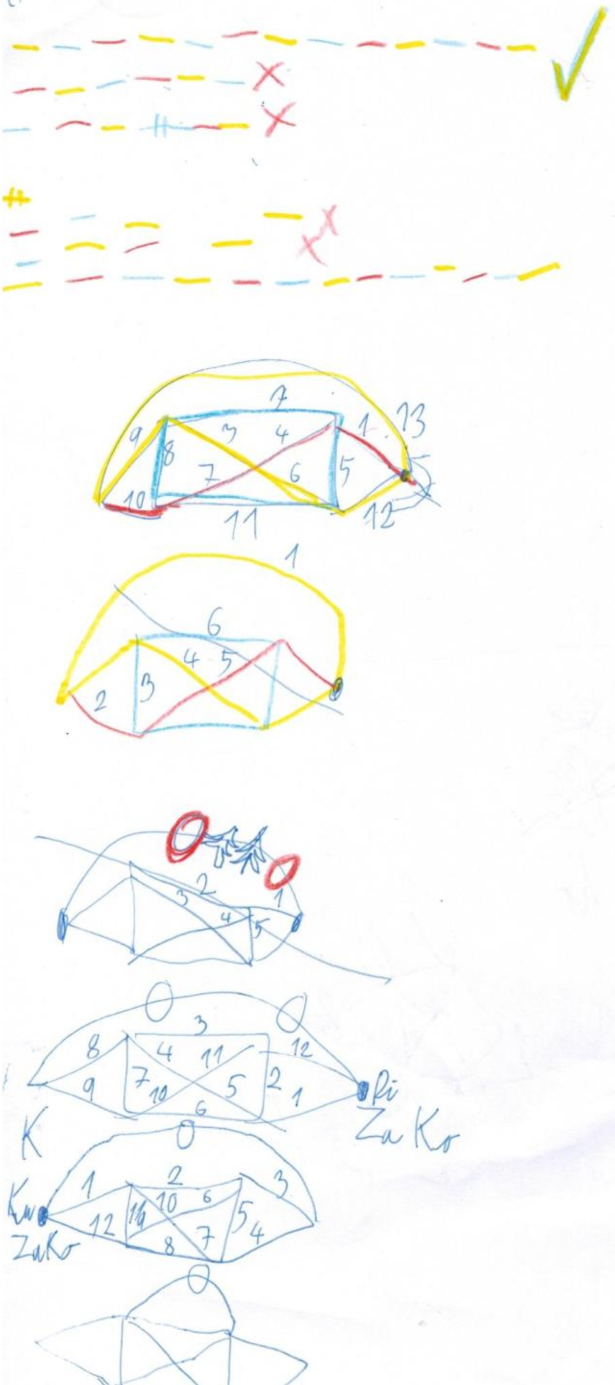
2



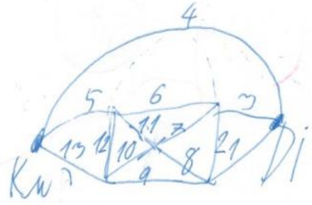
2/2

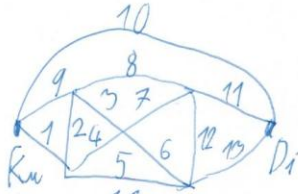
Tobiáš Junek

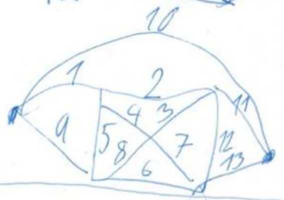
3

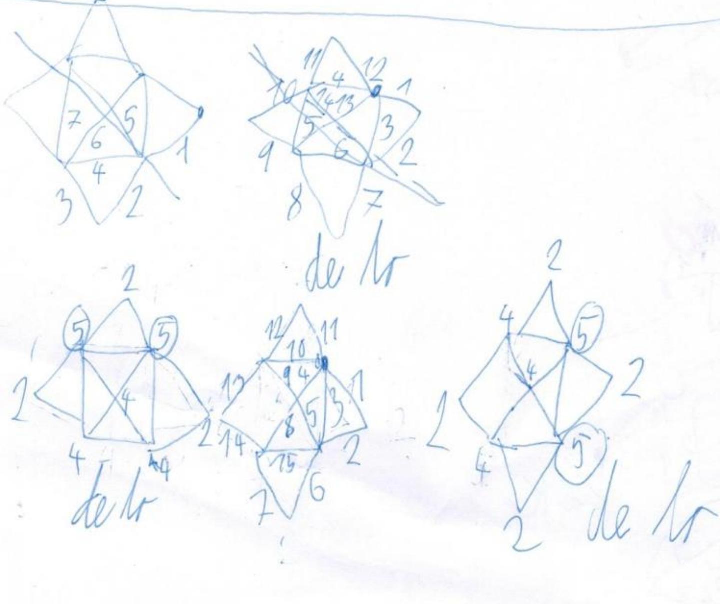


4



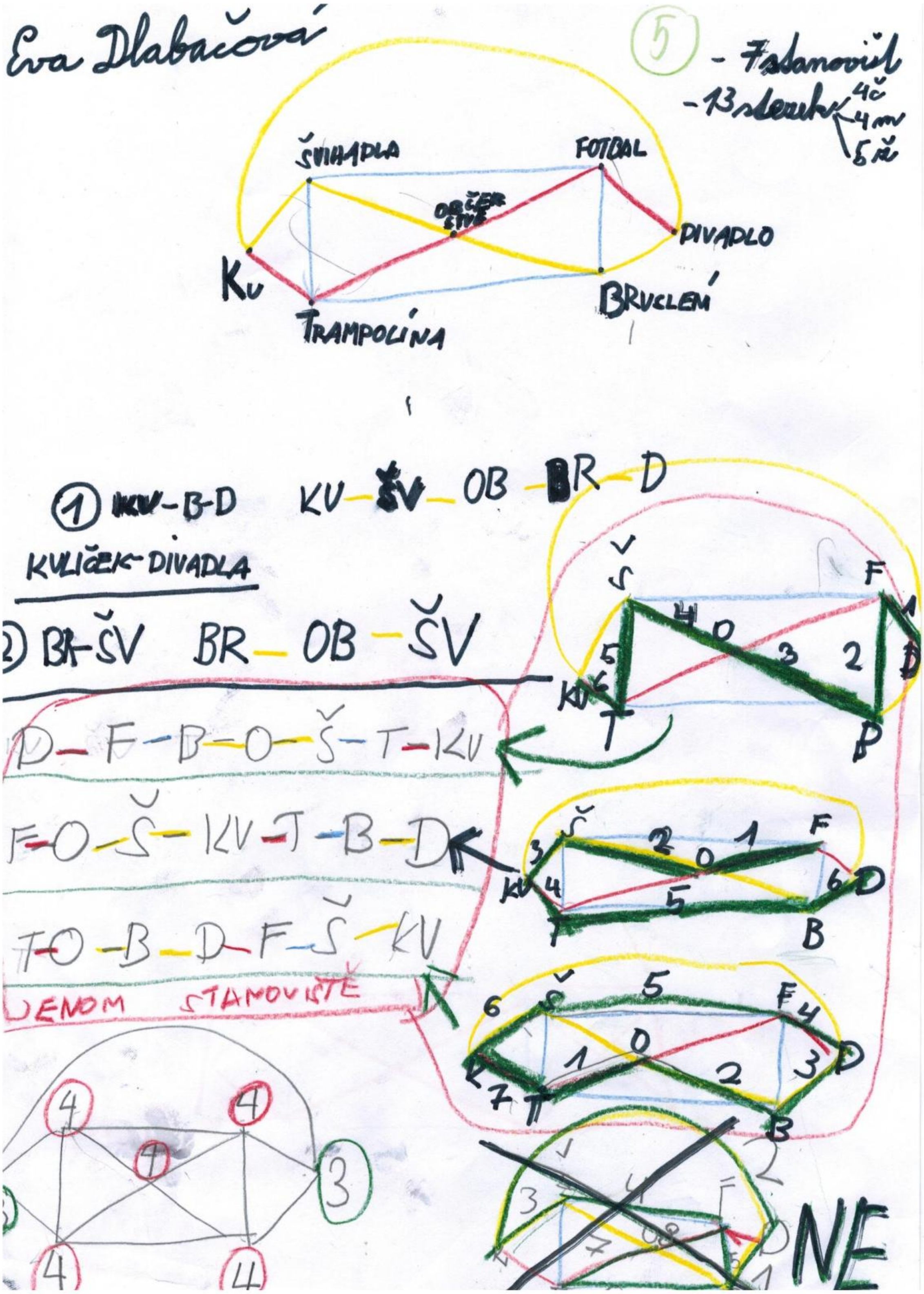


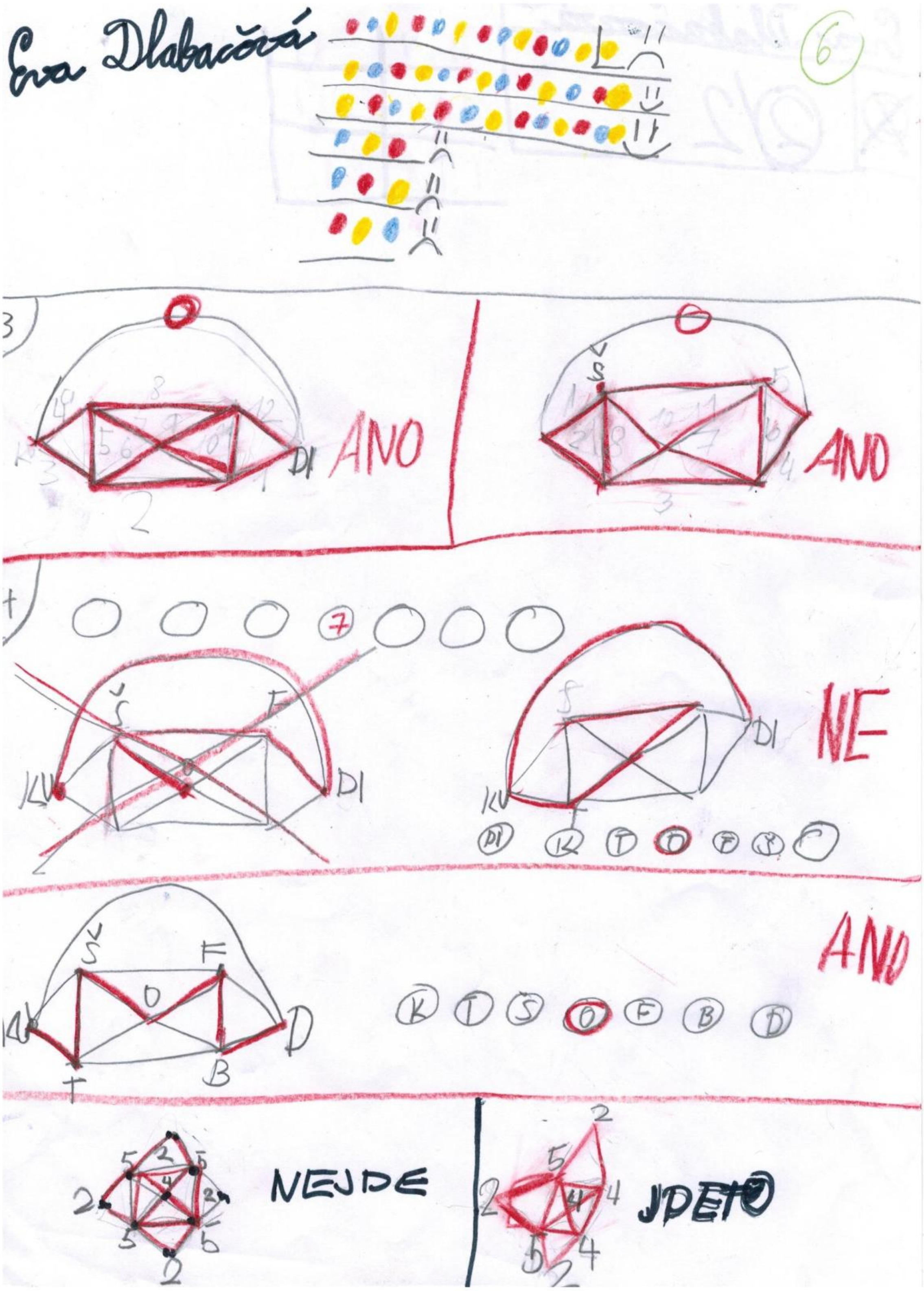




Příloha č. 2

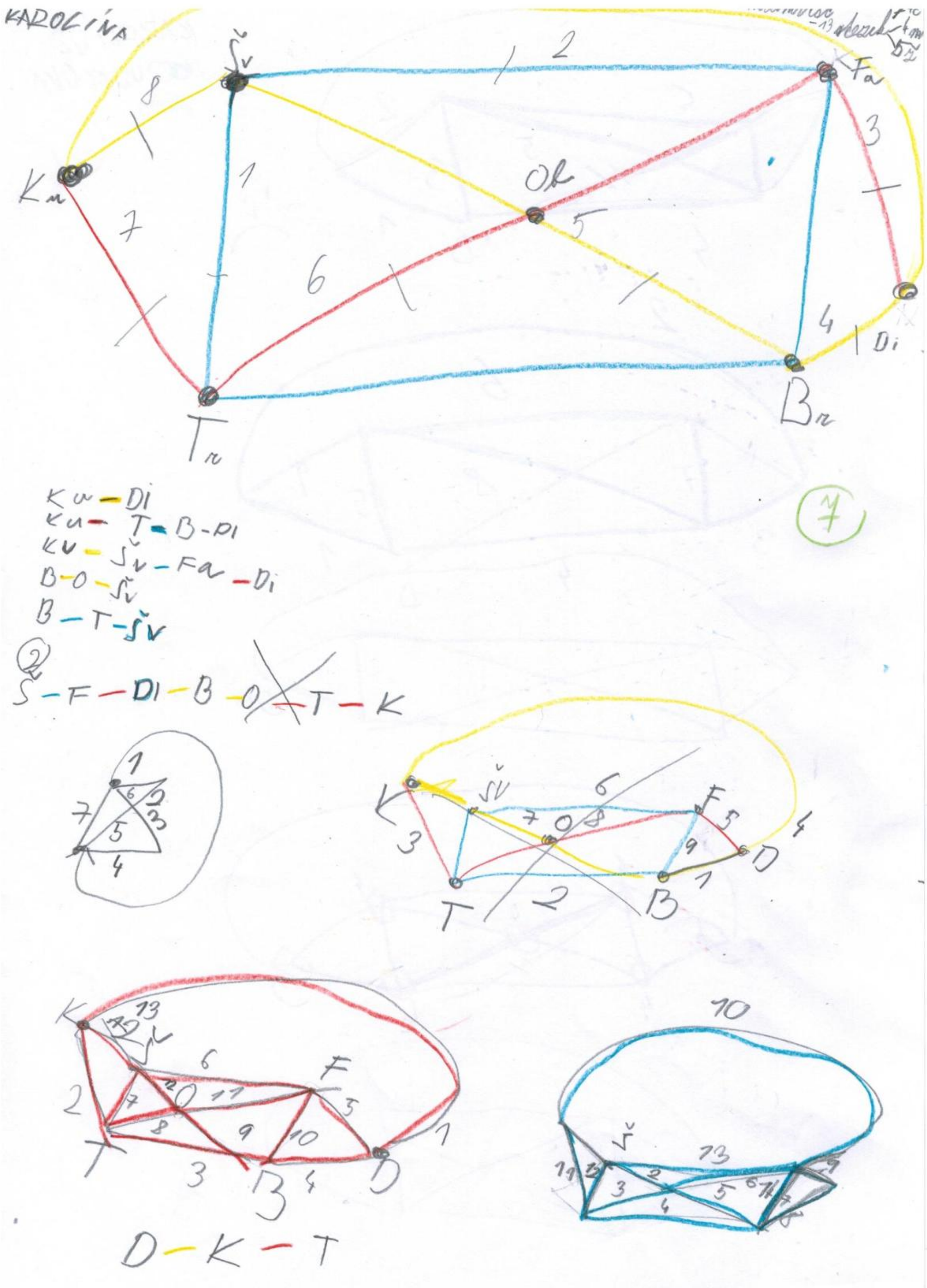
Řešení série gradovaných úloh – Eva




Eva Dlabačová
6
ANO
ANO
7
NE
ANO
NEJDE
JDETO

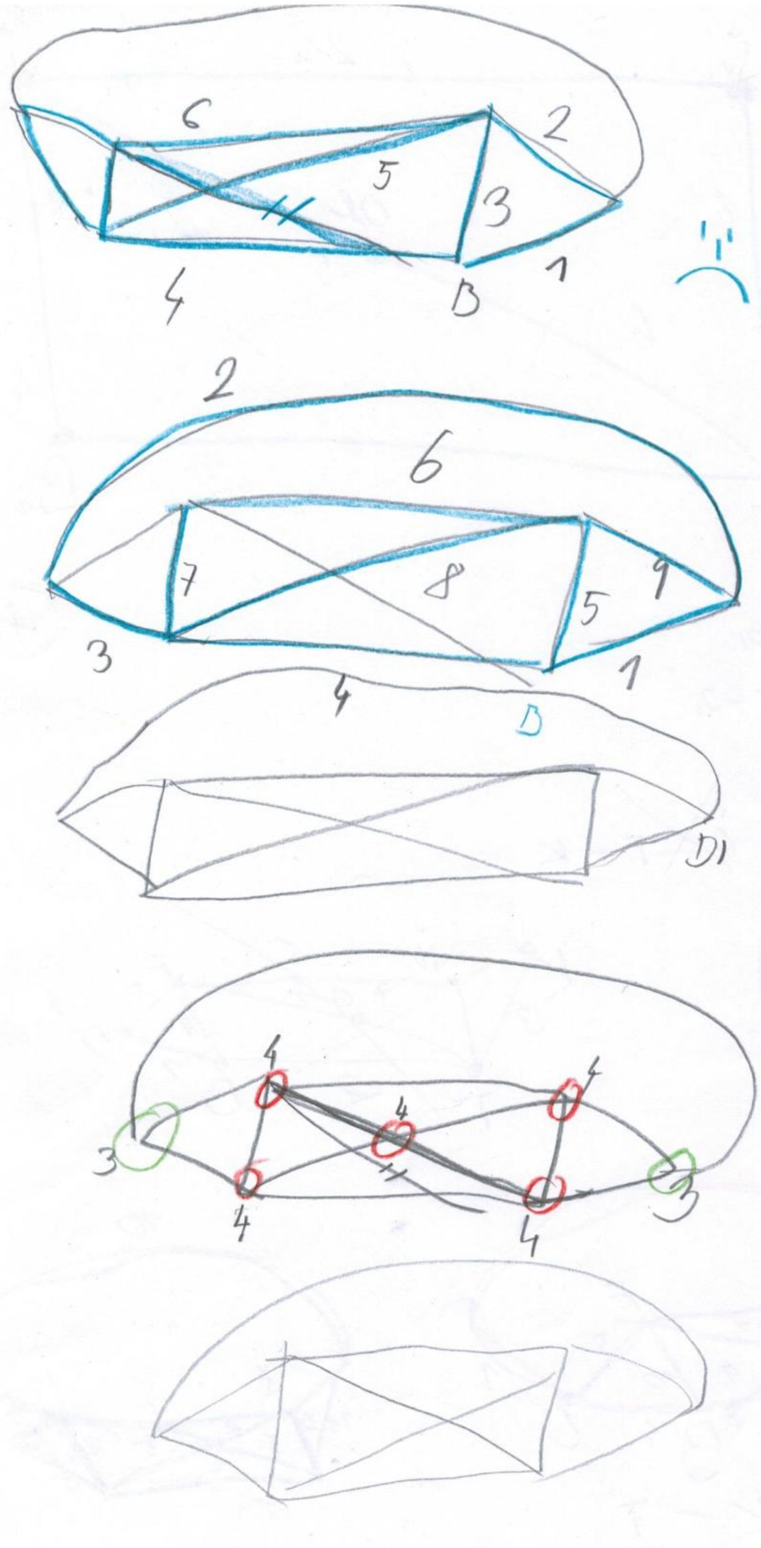
Příloha č. 3

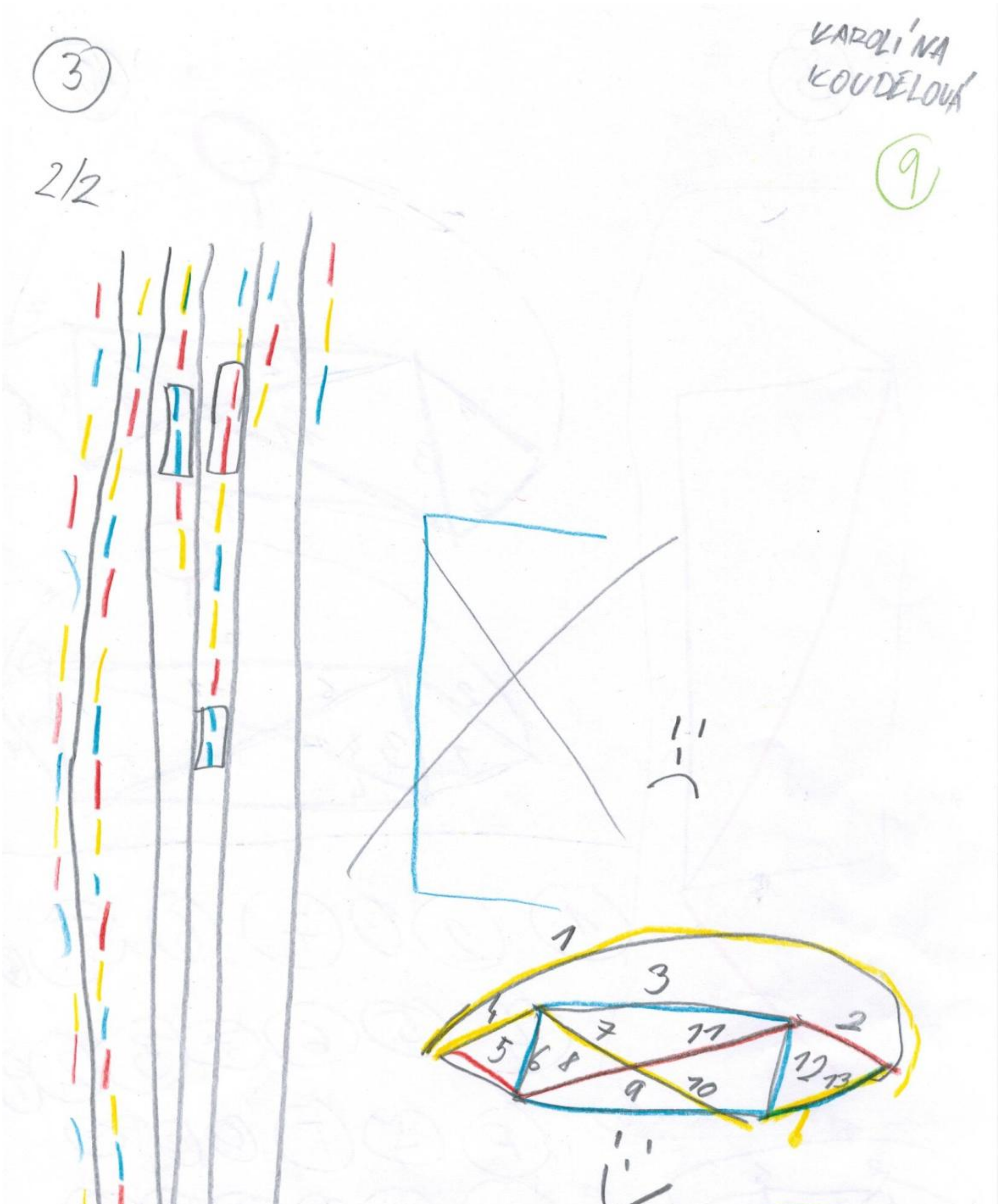
Řešení série gradovaných úloh – Karolína

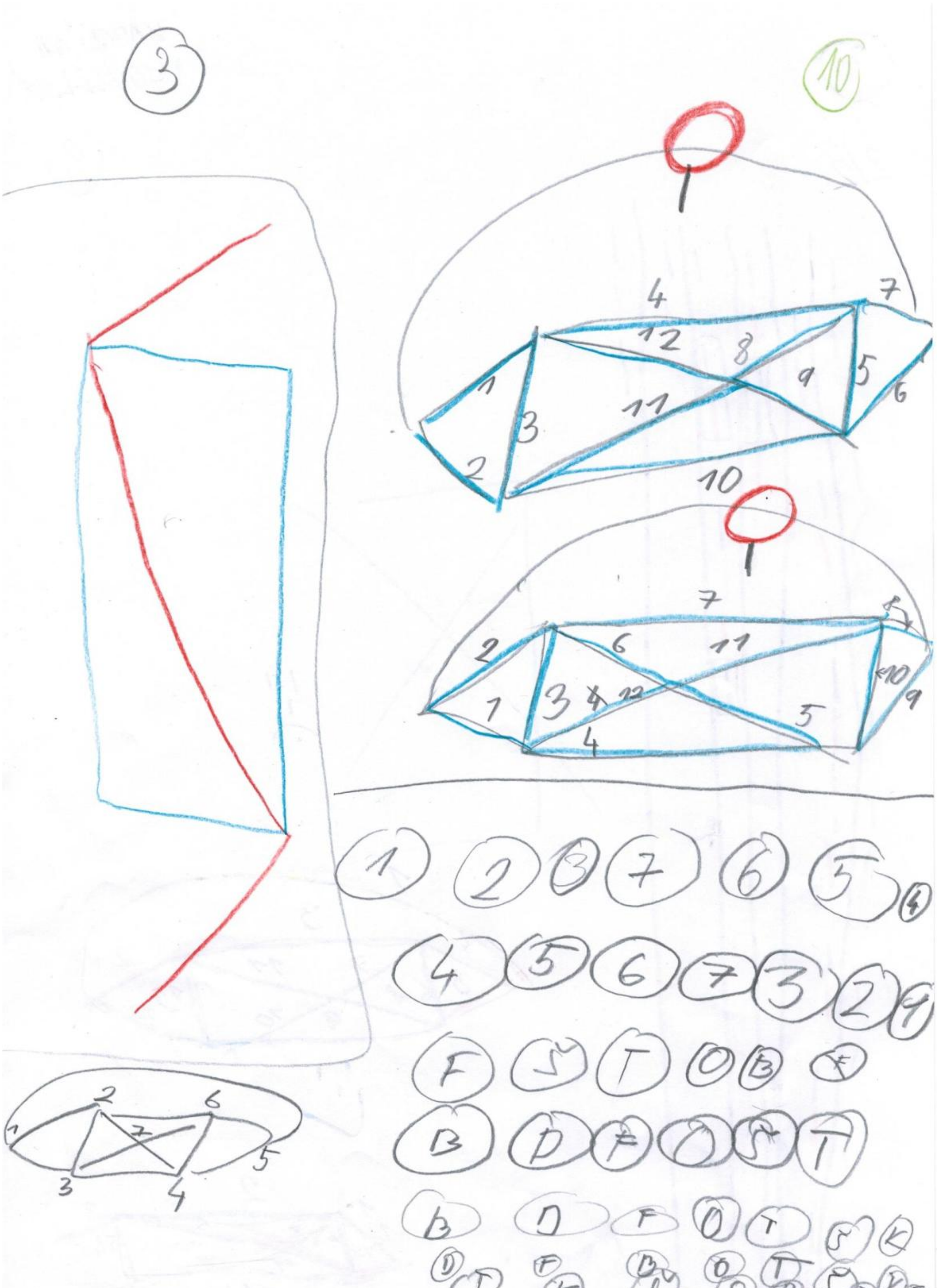


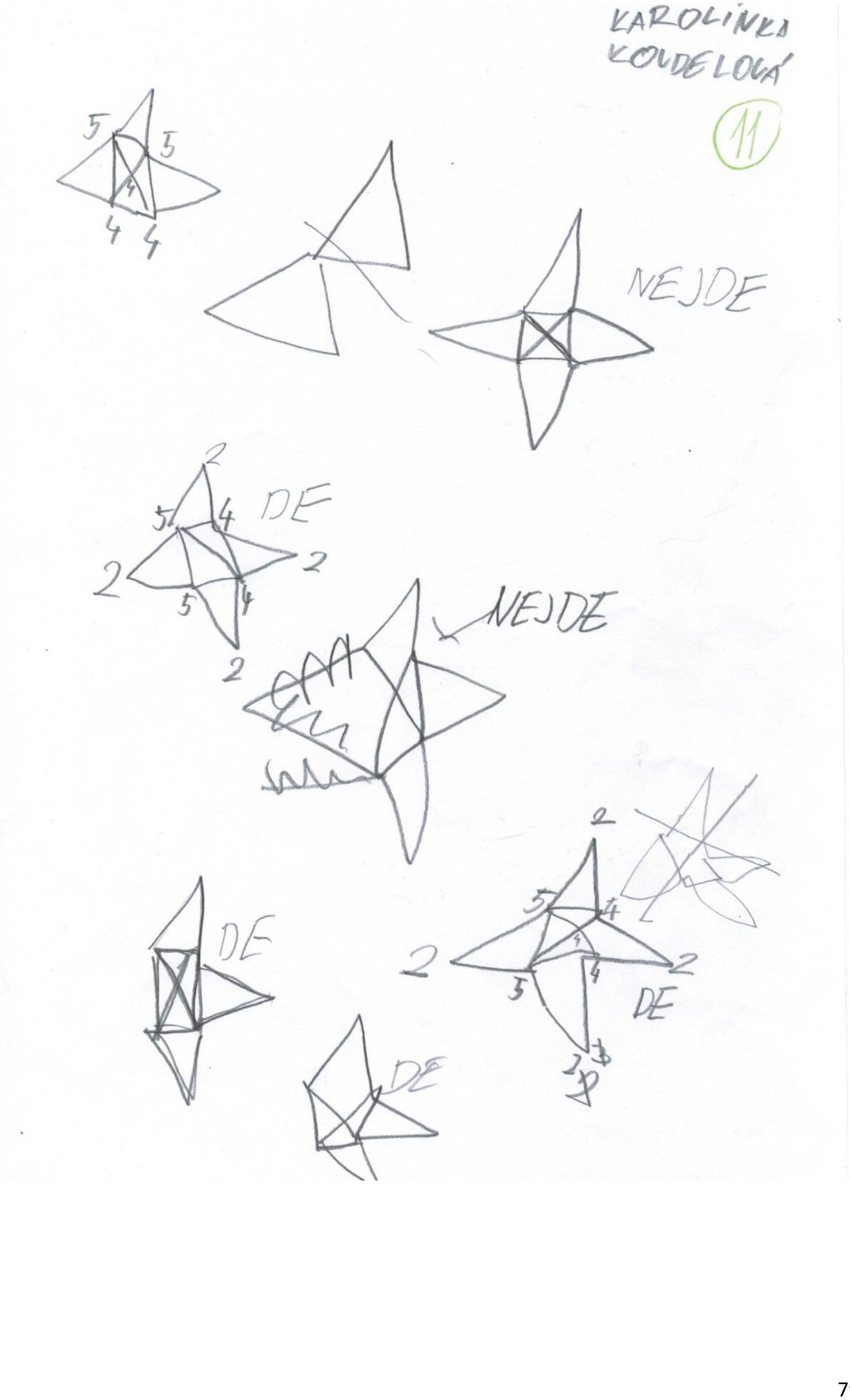
KAROLÍNA KOUDELOVÁ

8



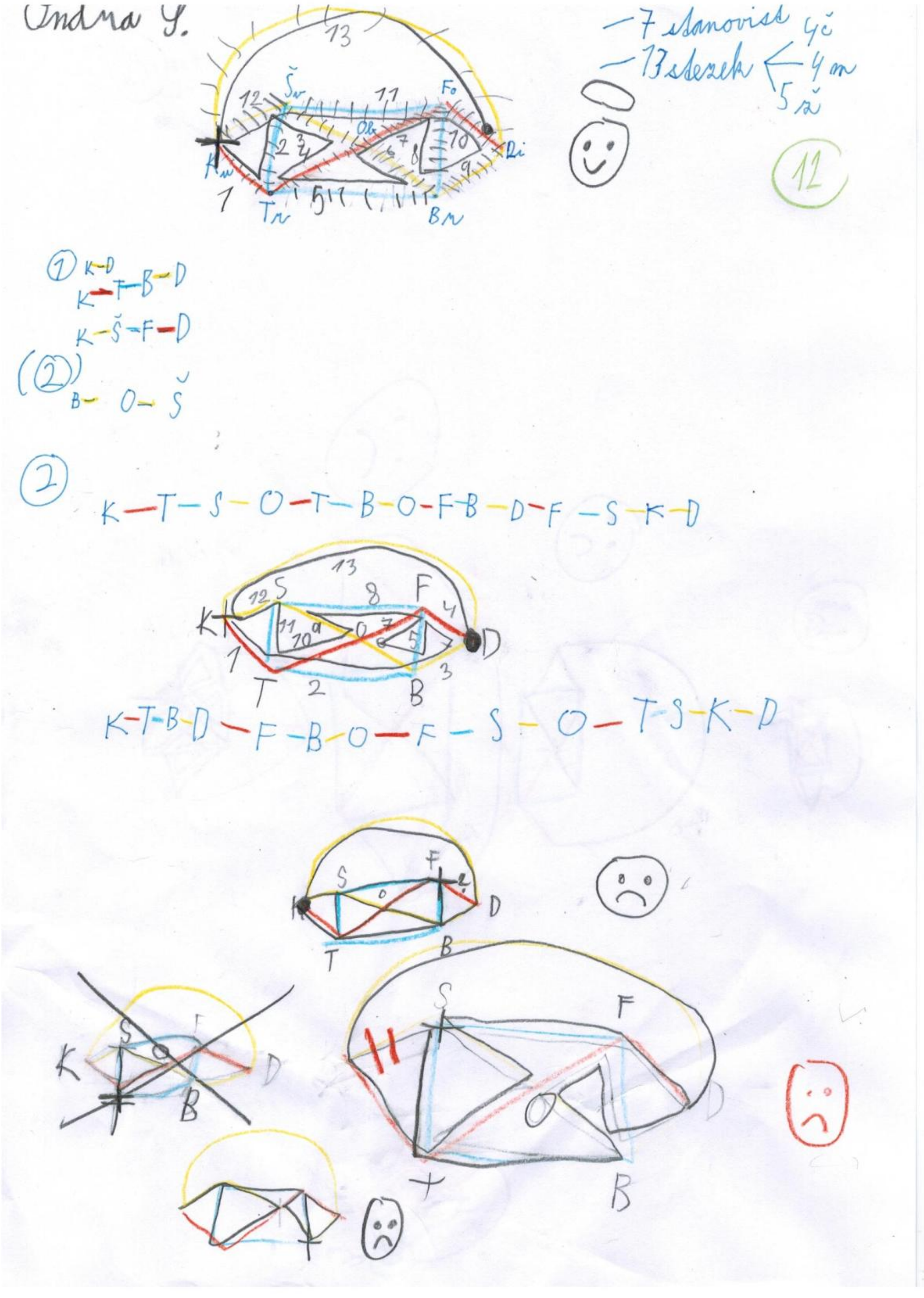

3
2/2
KAROLÍNA
KOUDELOVÁ
9

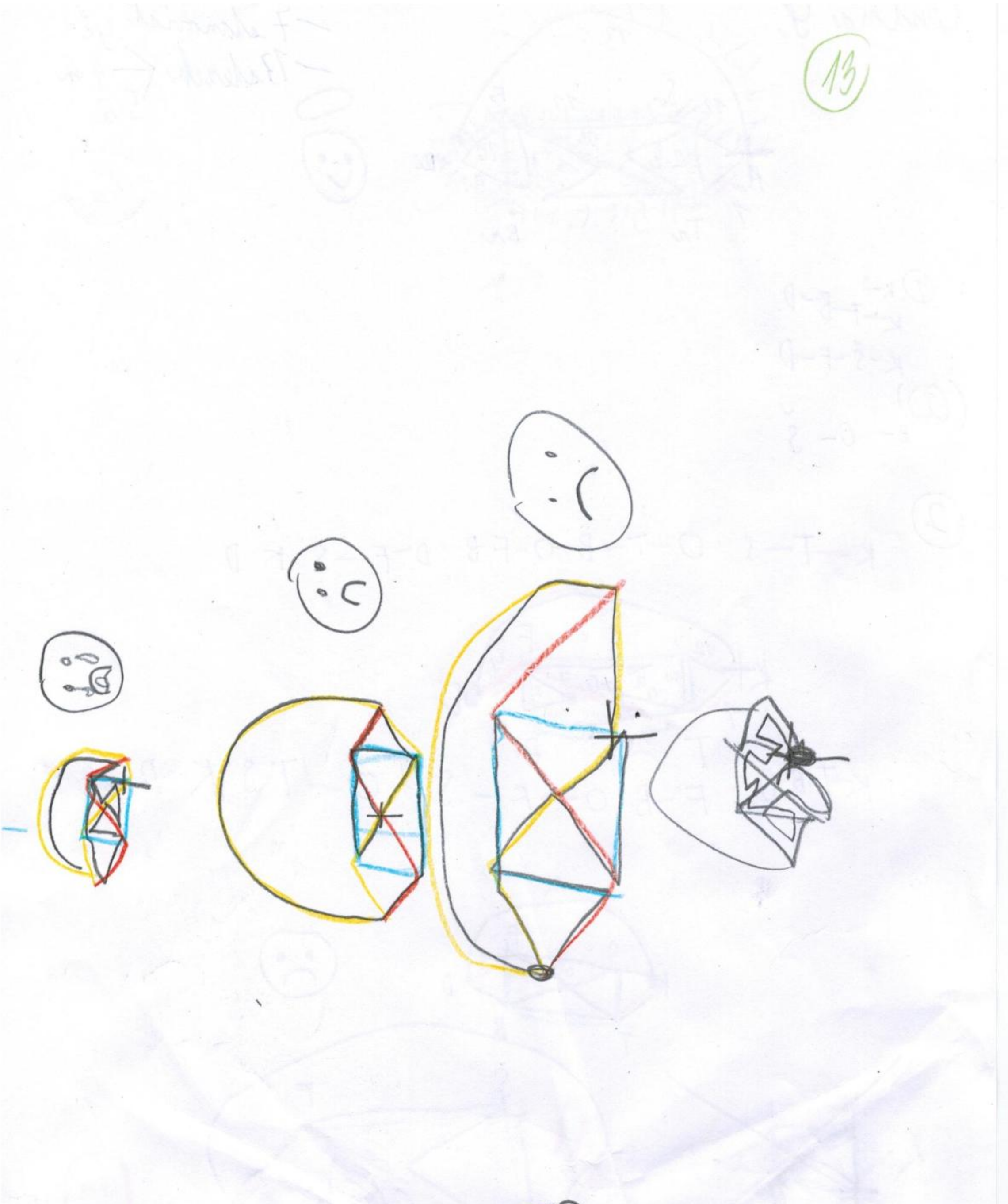


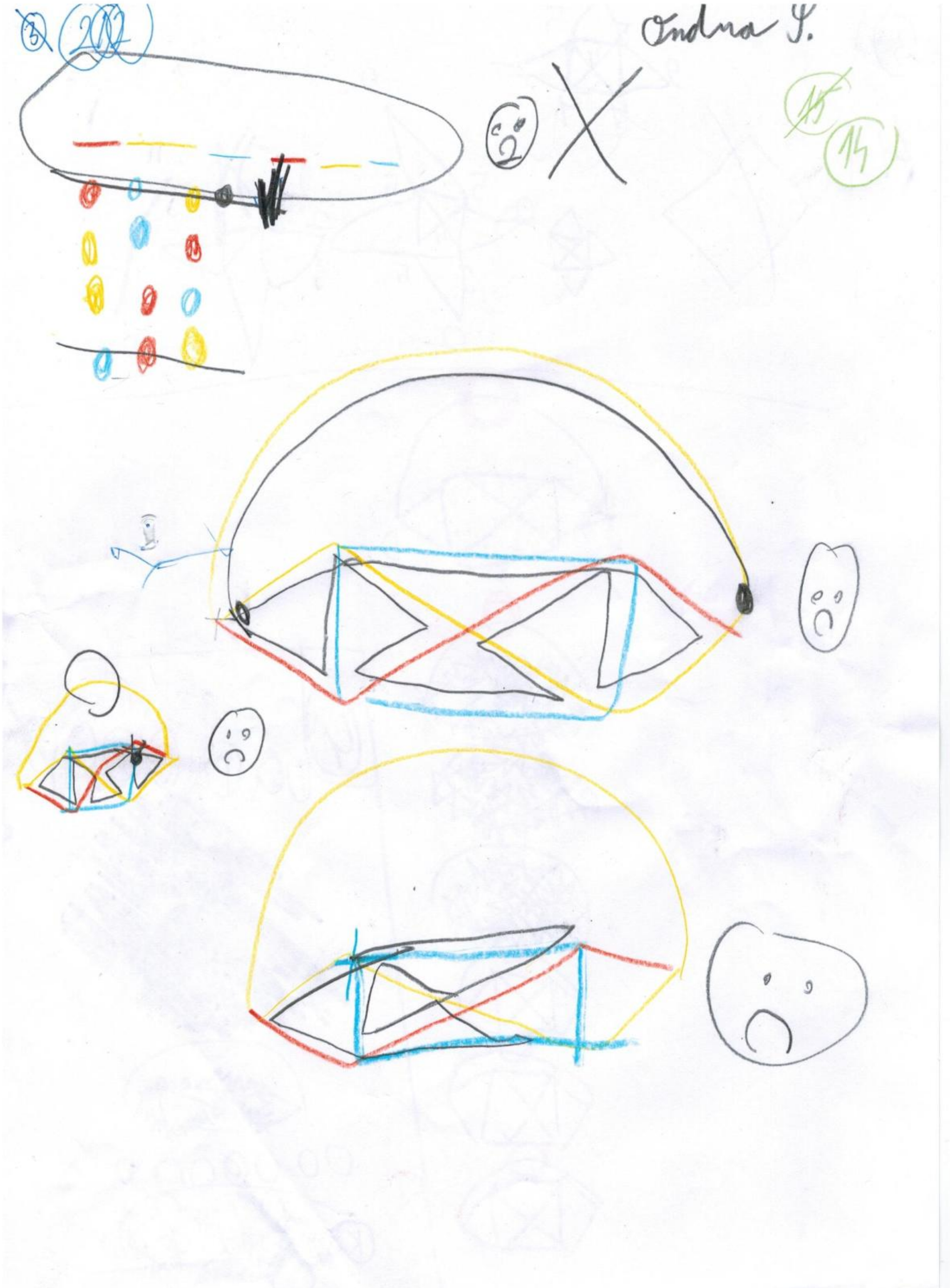

KAROLINKA
KOUDELOVÁ
11
NEJDE
DE
NEJDE
DE
DE
DE

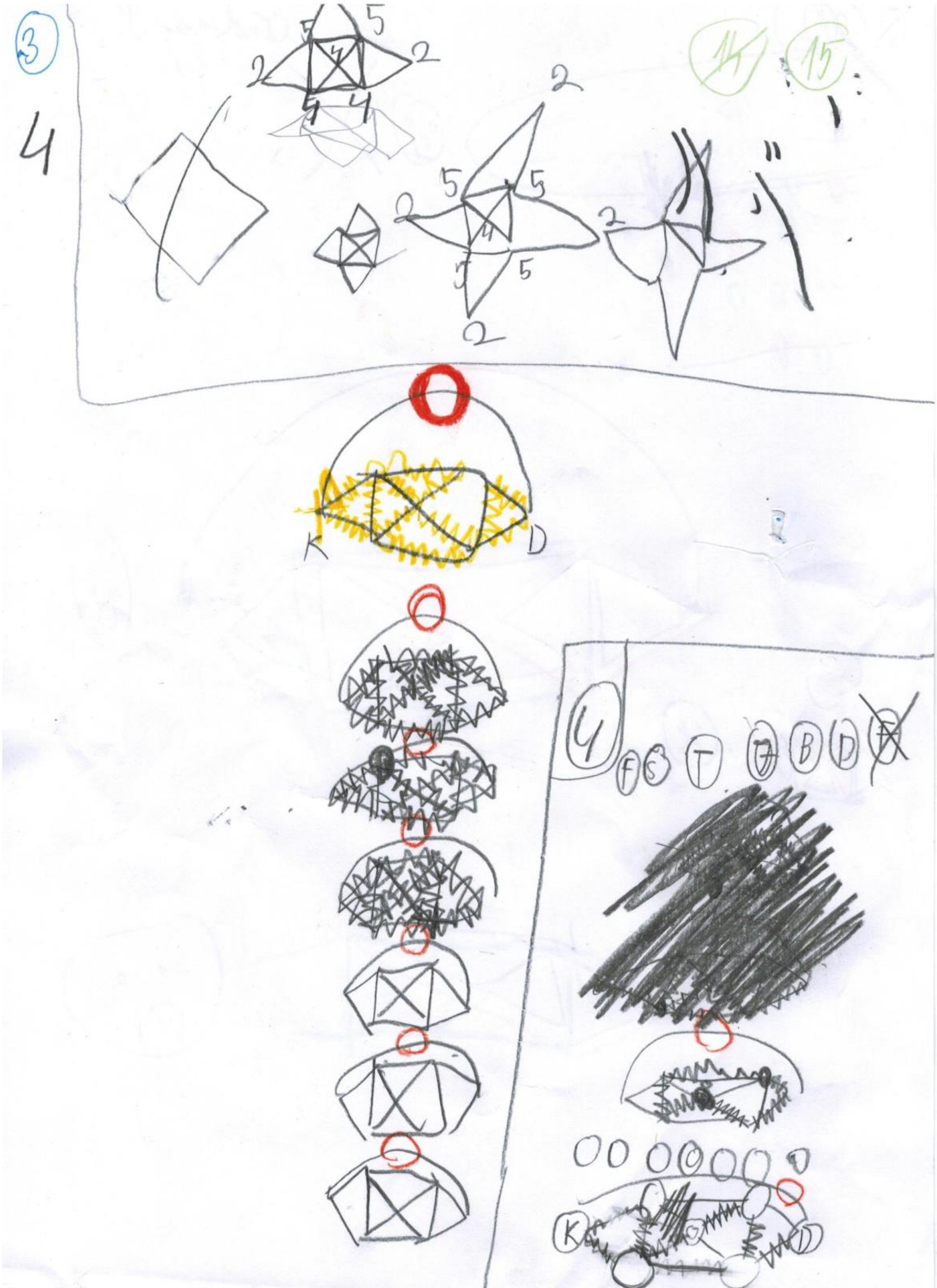
Příloha č. 4

Řešení série gradovaných úloh – Ondra





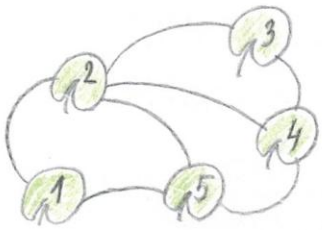

Ondra Š.


3
4
5
2
14
15
K
D
4
T
B
D

Příloha č. 5

Pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 1. ročník ZŠ.

1) ŽABKA SKÁČE MEZI LEKNÍNY. NAJDI JI CESTU.



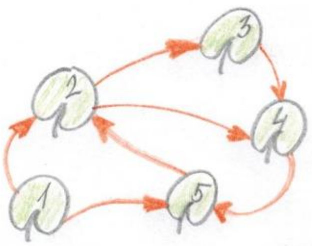
1 → 2 1 - 5 - 2

1 → 3

1 → 4

1 → 5

2) ŠIPKY URČUJÍ SMĚR, KTERÝM ŽABKA MŮŽE SKÁKAT. NAJDI JI CESTU.



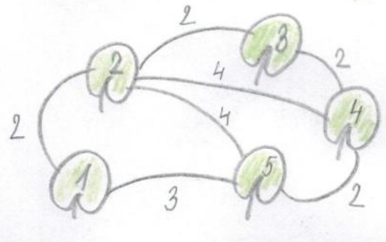
1 → 2 1 - 5 - 2

1 → 3

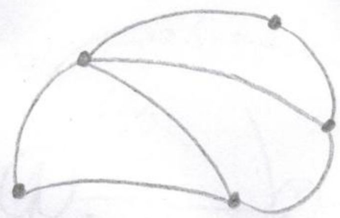
1 → 4

1 → 5

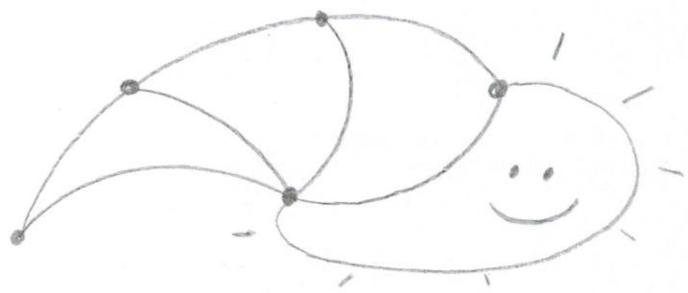
3) KOLIKRÁT SKOČÍ ŽABKA, KDYŽ SE CHCE DOSTAT OD PRVNÍHO K ČTVRTÉMU LEKNÍNU?



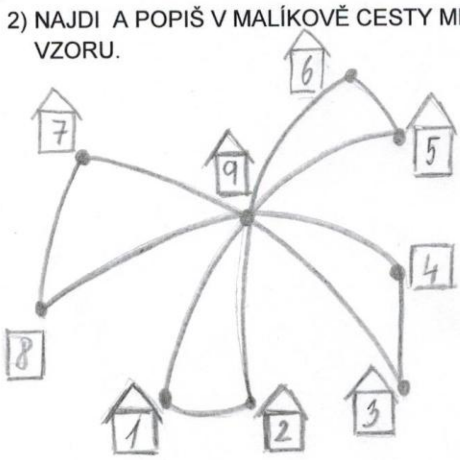
4) NAKRESLÍŠ OBRÁZEK JEDNÍM TAHEM?



1) MALÍŘ NAKRESLIL ČEPIČKU. CHCE PŘEBARVIT VŠECHNY ČÁRY ZELENOU PASTELKOU. JAK TO MÁ UDĚLAT, ABY KAŽDOU ČÁRU PŘEBARVIL PRÁVĚ JEDNOU A NEZVEDL PASTELKU Z PAPÍRU?



2) NAJDI A POPIŠ V MALÍKOVĚ CESTY MEZI DOMEČKY. PRACUJ PODLE VZORU.



1 → 6 1-9-5-6

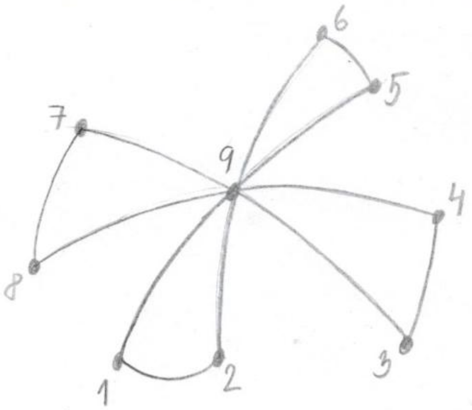
2 → 7

8 → 4

6 → 3

5 → 1

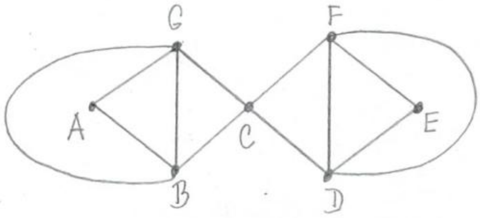
3) NAPIŠ, JAK PROJEDE KROPÍCÍ VŮZ MALÍKOV, KDYŽ CHCE POKROPIT VŠECHNY SILNICE A KAŽDOU PRÁVĚ JEDNOU.



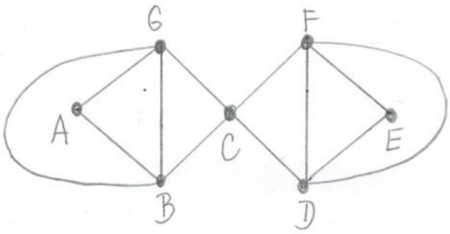
Příloha č. 6

Pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 2. ročník ZŠ.

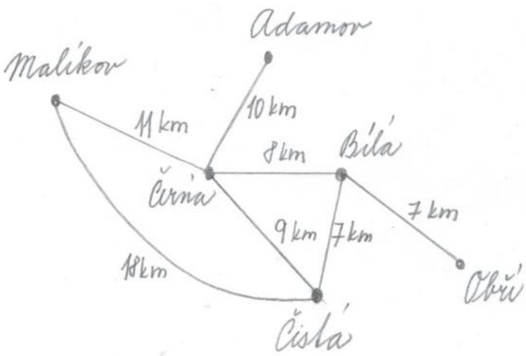
1) Babička jde na procházku do parku se sochami a chce projít všechny stezky tak, aby každou z nich prošla právě jednou. Kterou sochu uvidí jako poslední, když začne u sochy označené písmenem C?



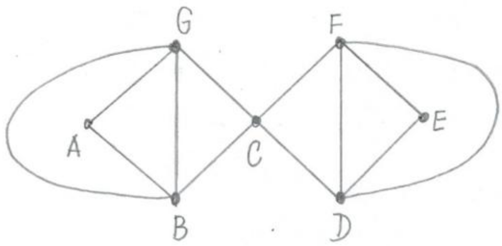
2) Najdi několik cest, kterými se dostane od sochy označené písmenem A k soše označené písmenem E.



3) Najdi několik cest mezi Malíkovem a Obřím a vyber tu nejkratší.



1) Babička jde na procházku do parku se sochami. Doplň, v jakém pořadí sochy uvidí.

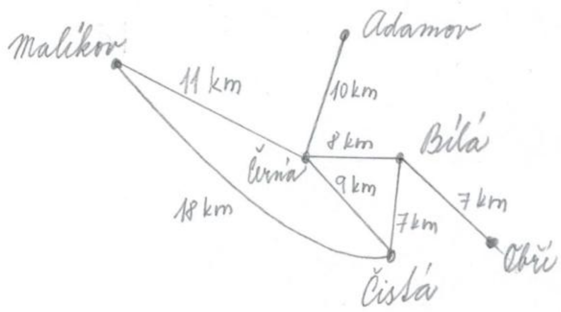


A – □ – B – □ – □ – D – □

B – □ – □ – C – D – □ – □

G – □ – □ – D – □ – □ – A

2) Doplň tabulku vzdálenosti mezi obcemi podle obrázku.

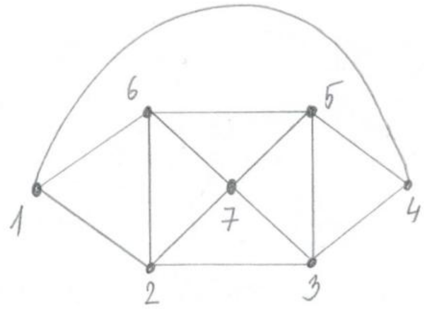


	Malíkov	Adamov	Bílá	Obří	Čistá	Černá
Malíkov						
Adamov						
Bílá						
Obří						
Čistá						
Černá						

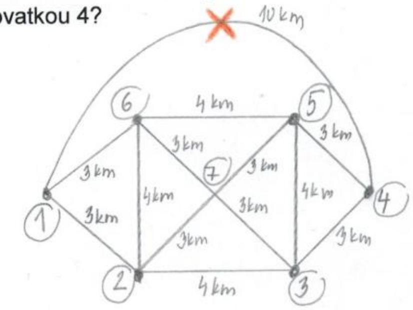
Příloha č. 7

Pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 3. ročník ZŠ.

1) Navrhni trasu kropícího vozu tak, aby pokropil všechny ulice v obci podle plánku, ale aby přitom projel každou z nich právě jednou. Číslicemi jsou označené křižovatky. Najdeš více řešení?

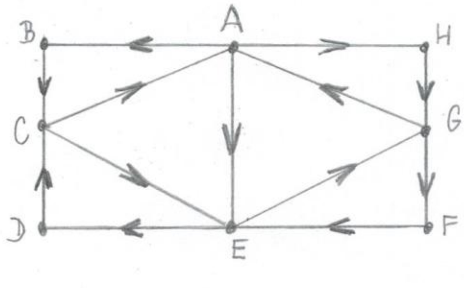


2) Jak se situace pro řidiče změní, když silničáři uzavřou přímou cestu spojující křižovatku 1s křižovatkou 4?

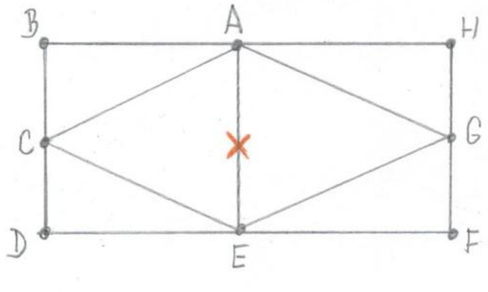


3) Jakou nejkratší vzdálenost v kilometrech by mohl ujet poštovní vůz, jestliže je u každé křižovatky poštovní schránka?

1) V obci zavedli silničáři mezi křižovatkami kvůli opravám jednosměrný provoz. Najdeš cestu pro popeláře, kteří musí projet každou z cest právě jednou a jejich cesta začíná křižovatkou označenou písmenem A? Vrátí se na konci své cesty do výchozího bodu?



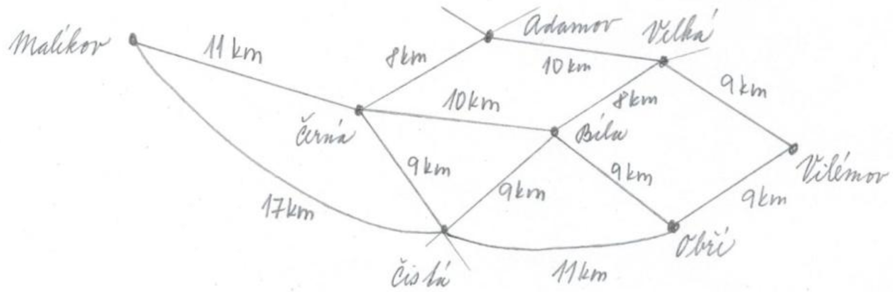
2) Jak se situace pro řidiče popelářského vozu změní, jestliže silničáři zruší jednosměrky, ale uzavřou přímou cestu mezi křižovatkami A a E?



Příloha č. 8

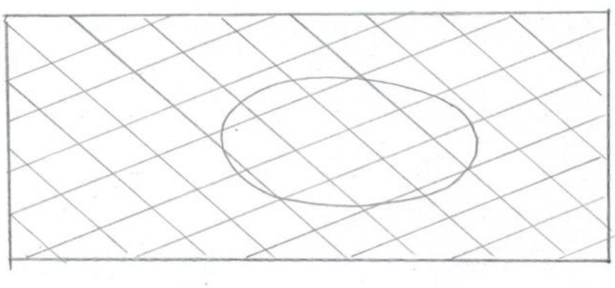
Pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 4. ročník ZŠ.

1) Doplň tabulku vzdálenosti mezi obcemi podle mapy:

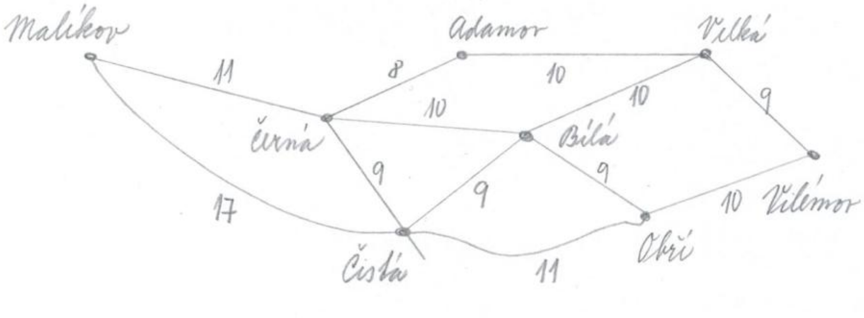


	Malíkov	Adamov	Bílá	Obří	Čistá	Černá	Velká	Vilémov
Malíkov								
Adamov								
Bílá								
Obří								
Čistá								
Černá								
Velká								
Vilémov								

2) Vybarvi mozaiku za použití co nejmenšího počtu barev tak, aby byla každá dvě sousední políčka vybarvená jinou barvou.



1) Navrhni různé trasy podle mapy pro cyklistu, který chce denně ujet 25 – 30 kilometrů. Na kolik dnů by mu tvé návrhy vystačily?

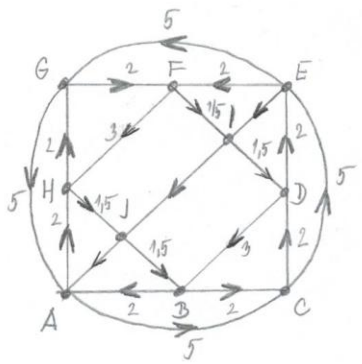


2) Vybarvi mozaiku za použití co nejmenšího počtu barev tak, aby byla každá dvě sousední políčka vybarvená jinou barvou.

Příloha č. 9

Pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 5. ročník ZŠ.

1) Nakresli obrázek jedním tahem, při kreslení musíš dodržet zadanou orientaci čar.



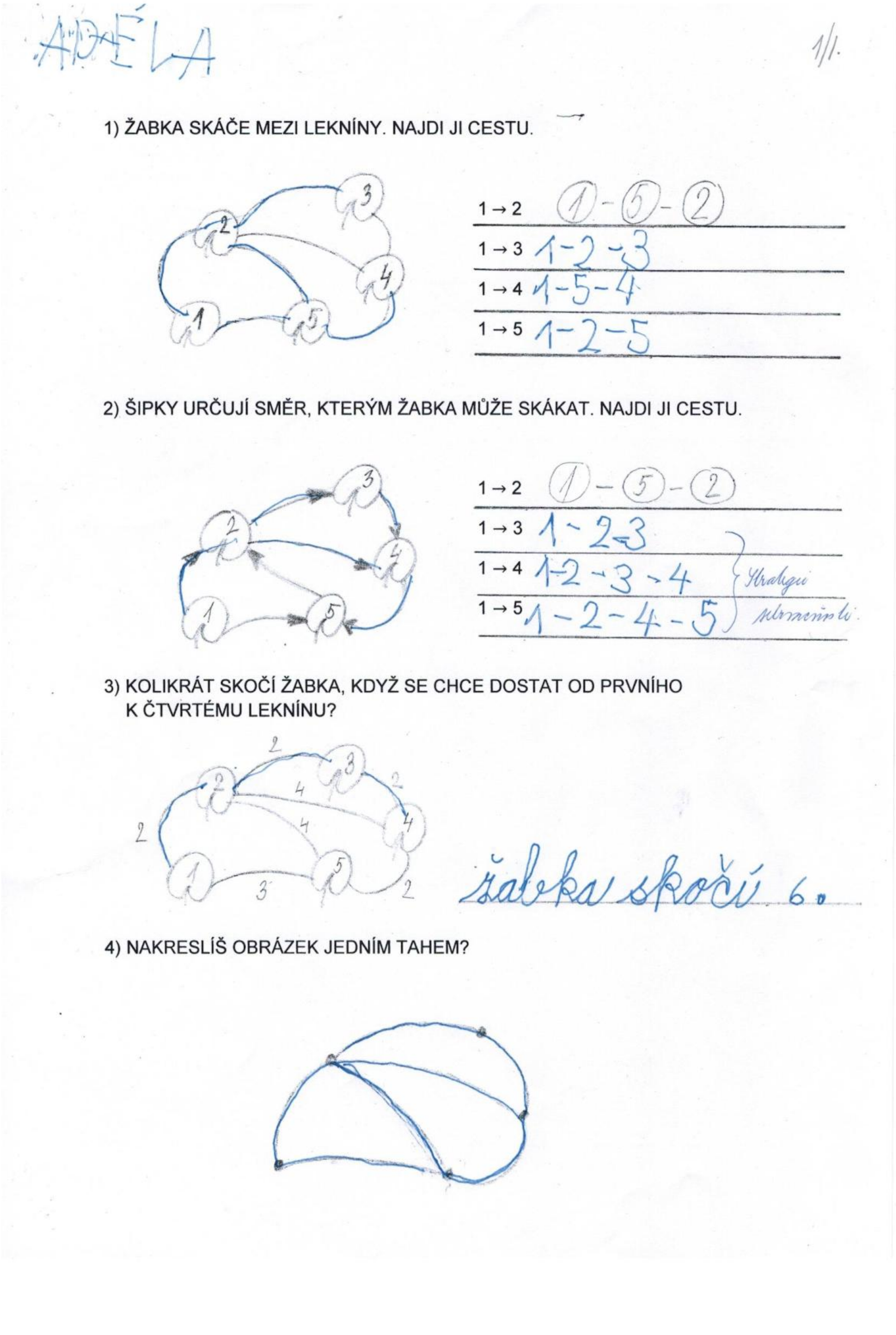
2) Najdi a popiš několik cest z bodu A do bodu E. Vypočítej jejich délku a vyber tu nejkratší.

1) Navrhni obrázek tak, aby se dal nakreslit jedením tahem, přičemž každá čára musí být vytažena právě jednou.

2) Navrhni mozaiku tak, aby se dala vybarvit dvěma pastelkami a žádná dvě sousední pole nebyla vybarvena stejnou pastelkou.

Příloha č. 10

Vyřešené pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 1. ročník ZŠ.


ADÉLA

1/1.

1) ŽABKA SKÁČE MEZI LEKNÍNY. NAJDI JI CESTU.

1 → 2	1 - 5 - 2
1 → 3	1 - 2 - 3
1 → 4	1 - 5 - 4
1 → 5	1 - 2 - 5

2) ŠIPKY URČUJÍ SMĚR, KTERÝM ŽABKA MŮŽE SKÁKAT. NAJDI JI CESTU.

1 → 2	1 - 5 - 2
1 → 3	1 - 2 - 3
1 → 4	1 - 2 - 3 - 4
1 → 5	1 - 2 - 4 - 5

Strategii [illegible]

3) KOLIKRÁT SKOČÍ ŽABKA, KDYŽ SE CHCE DOSTAT OD PRVNÍHO K ČTVRTÉMU LEKNÍNU?

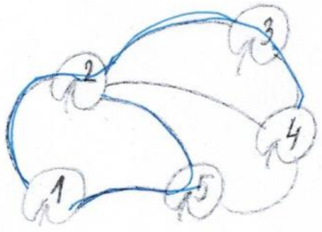
žabka skočí 6.

4) NAKRESLÍŠ OBRÁZEK JEDNÍM TAHEM?

Jana

1/1.

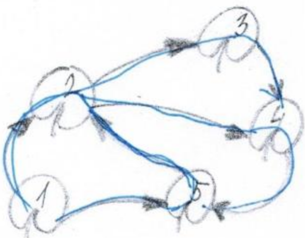
1) ŽABKA SKÁČE MEZI LEKNÍNY. NAJDI JI CESTU.



1 → 2	1 - 5 - 2
1 → 3	1 - 2 - 3
1 → 4	1 - 2 - 3 - 4
1 → 5	1 - 2 - 5

Jana šla nejdříve přímou cestou. Pak své řešení změnila (viz vzor).

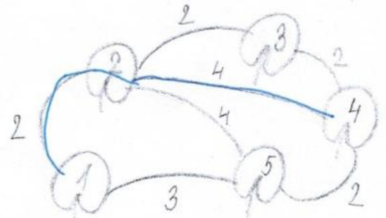
2) ŠIPKY URČUJÍ SMĚR, KTERÝM ŽABKA MŮŽE SKÁKAT. NAJDI JI CESTU.



1 → 2	1 - 5 - 2
1 → 3	1 - 2 - 3
1 → 4	1 - 2 - 3 + chyba
1 → 5	1 - 2 - 4 - 5

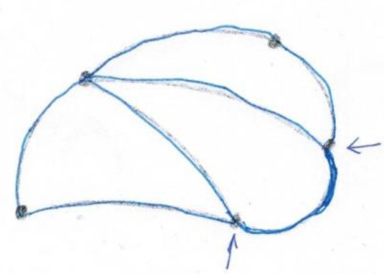
Oprava chyby?
„Chtěla jsem jít jinak."

3) KOLIKRÁT SKOČÍ ŽABKA, KDYŽ SE CHCE DOSTAT OD PRVNÍHO K ČTVRTÉMU LEKNÍNU?



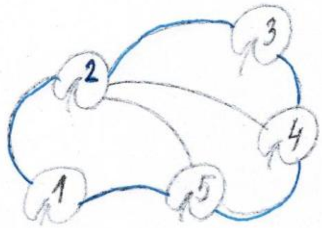
žabka skočí 6.

4) NAKRESLÍŠ OBRÁZEK JEDNÍM TAHEM?



ŠTĚPÁN 1/1.

1) ŽABKA SKÁČE MEZI LEKNÍNY. NAJDI JI CESTU.



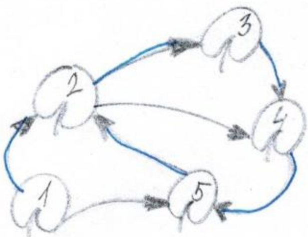
1 → 2 1 - 5 - 2

1 → 3 1 - 2 - 3

1 → 4 2 - 3 - 4

1 → 5

2) ŠIPKY URČUJÍ SMĚR, KTERÝM ŽABKA MŮŽE SKÁKAT. NAJDI JI CESTU.



1 → 2 1 - 5 - 2

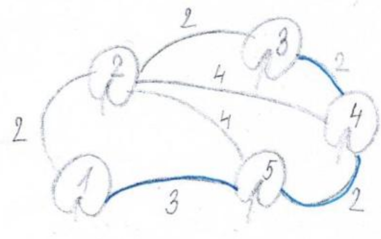
1 → 3 1 - 2 - 3

1 → 4 2 - 3 - 4

1 → 5 1 - 2 - 4 ! Chyba

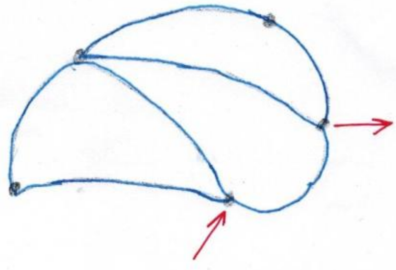
(Strategie nezávislosti?)

3) KOLIKRÁT SKOČÍ ŽABKA, KDYŽ SE CHCE DOSTAT OD PRVNÍHO
K ČTVRTÉMU LEKNÍNU?



7 ! Chyba

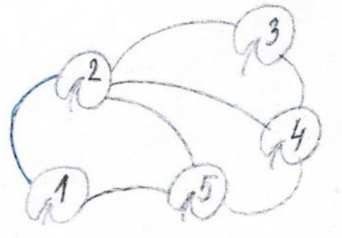
4) NAKRESLÍŠ OBRÁZEK JEDNÍM TAHEM?



Jedním tahem ☺.

Viki 1/1.

1) ŽABKA SKÁČE MEZI LEKNÍNY. NAJDI JI CESTU.



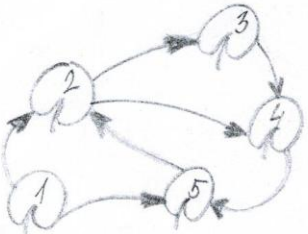
1 → 2 1 - 5 - 2

1 → 3 1-5-2-4-3

1 → 4 1-5-4

1 → 5 1-2-4-5

2) ŠIPKY URČUJÍ SMĚR, KTERÝM ŽABKA MŮŽE SKÁKAT. NAJDI JI CESTU.



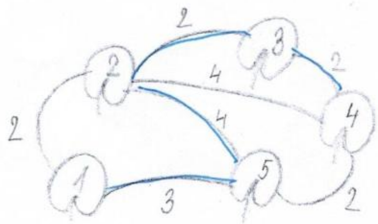
1 → 2 1 - 5 - 2

1 → 3 1-2-3

1 → 4 1-2-4

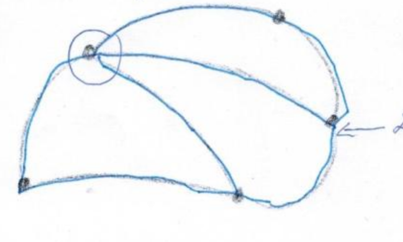
1 → 5 1-2-4-5

3) KOLIKRÁT SKOČÍ ŽABKA, KDYŽ SE CHCE DOSTAT OD PRVNÍHO K ČTVRTÉMU LEKNÍNU? 11



15234 11

4) NAKRESLÍŠ OBRÁZEK JEDNÍM TAHEM?

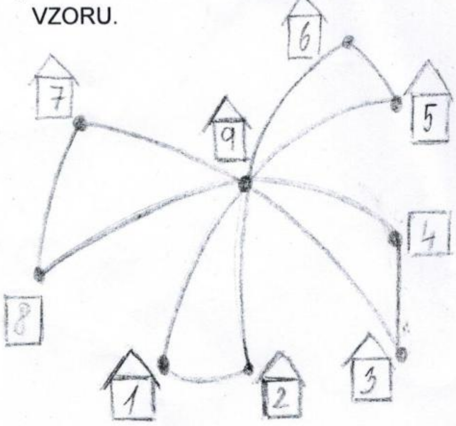


EMA N. 1/II.

1) MALÍŘ NAKRESLIL ČEPIČKU. CHCE PŘEBARVIT VŠECHNY ČÁRY ZELENOU PASTELKOU. JAK TO MÁ UDĚLAT, ABY KAŽDOU ČÁRU PŘEBARVIL PRÁVĚ JEDNOU A NEZVEDL PASTELKU Z PAPÍRU?

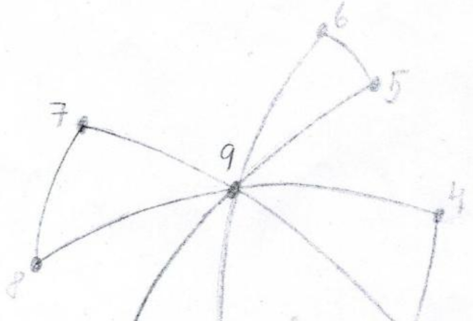
Součást čepičky?

2) NAJDI A POPIŠ V MALÍKOVĚ CESTY MEZI DOMEČKY. PRACUJ PODLE VZORU.



1 → 6	1 - 9 - 5 - 6
2 → 7	2 - 9 - 7
8 → 4	8 - 9 - 4
6 → 3	6 - 9 - 3
5 → 1	5 - 9 - 1

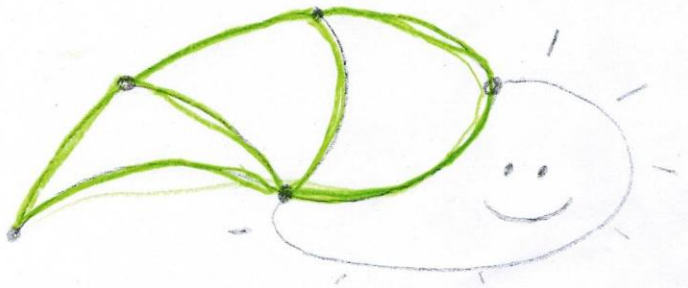
3) NAPIŠ, JAK PROJEDE KROPÍCÍ VŮZ MALÍKOV, KDYŽ CHCE POKROPIT VŠECHNY SILNICE A KAŽDOU PRÁVĚ JEDNOU.



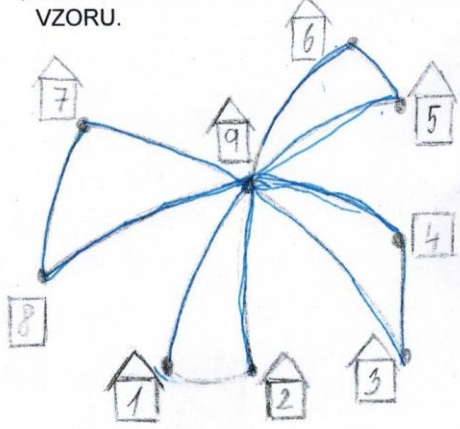
7 - 9 - 6 - 5 - 9 - 4 - 3 - 9 - 2 -
1 - 9 - 8 - 7

STĚPÁN 1/II

1) MALÍŘ NAKRESLIL ČEPIČKU. CHCE PŘEBARVIT VŠECHNY ČÁRY ZELENOU PASTELKOU. JAK TO MÁ UDĚLAT, ABY KAŽDOU ČÁRU PŘEBARVIL PRÁVĚ JEDNOU A NEZVEDL PASTELKU Z PAPÍRU?



2) NAJDI A POPIŠ V MALÍKOVĚ CESTY MEZI DOMEČKY. PRACUJ PODLE VZORU.



1 → 6 1 - 9 - 5 - 6

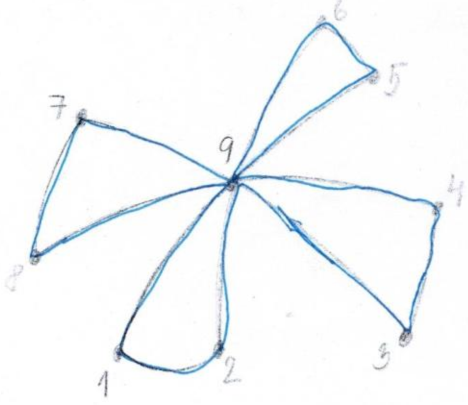
2 → 7 2 - 9 - 7

8 → 4 8 - 4 - 1

6 → 3 9 - 3 - 1

5 → 1 9 - 5 - 1

3) NAPIŠ, JAK PROJEDE KROPÍCÍ VŮZ MALÍKOV, KDYŽ CHCE POKROPIT VŠECHNY SILNICE A KAŽDOU PRÁVĚ JEDNOU.

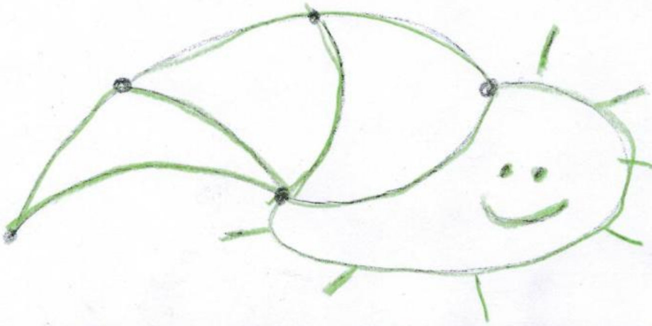


96 54 3 2 1 8 7

VERČA

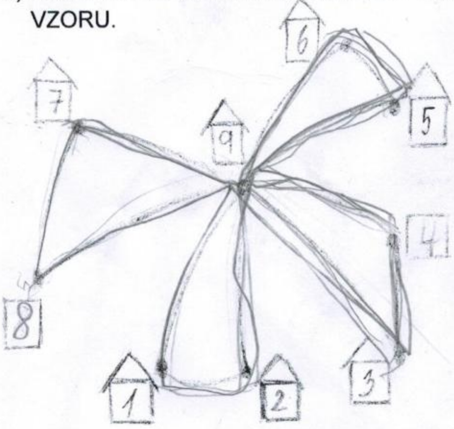
1/11.

1) MALÍŘ NAKRESLIL ČEPIČKU. CHCE PŘEBARVIT VŠECHNY ČÁRY ZELENOU PASTELKOU. JAK TO MÁ UDĚLAT, ABY KAŽDOU ČÁRU PŘEBARVIL PRÁVĚ JEDNOU A NEZVEDL PASTELKU Z PAPÍRU?



! chyba.

2) NAJDI A POPIŠ V MALÍKOVĚ CESTY MEZI DOMEČKY. PRACUJ PODLE VZORU.



1 → 6 1 - 9 - 5 - 6

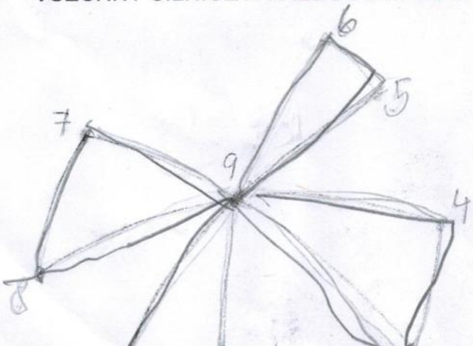
2 → 7

8 → 4

6 → 3

5 → 1

3) NAPIŠ, JAK PROJEDE KROPÍCÍ VŮZ MALÍKOV, KDYŽ CHCE POKROPIT VŠECHNY SILNICE A KAŽDOU PRÁVĚ JEDNOU.



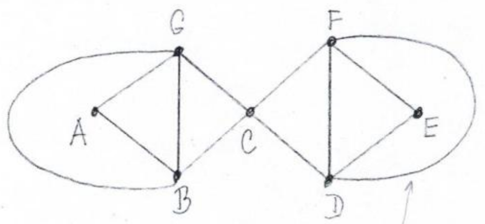
Příloha č. 11

Vyřešené pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 2. ročník ZŠ.

ANNA M.

2/1.

1) Babička jde na procházku do parku se sochami a chce projít všechny stezky tak, aby každou z nich prošla právě jednou. Kterou sochu uvidí jako poslední, když začne u sochy označené písmenem C?



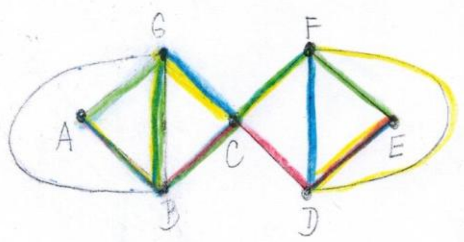
D → F ✓

D ∩ F ✓

Rozlišení cest (zápis.).

C → D → F → E → D ∩ F → C → B → G → A → B ∩ G → C

2) Najdi několik cest, kterými se dostane od sochy označené písmenem A k soše označené písmenem E.



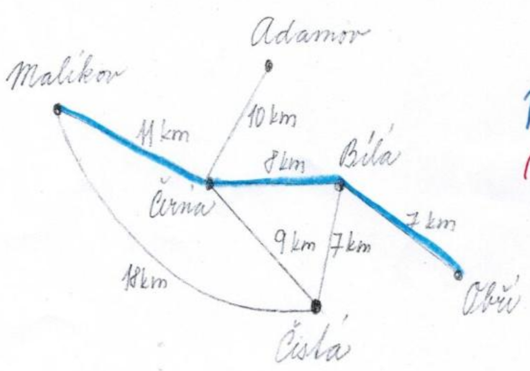
A → B → C → D → E

A → G → B → C → F → D → E

A → B → G → C → F → D → E

A → B → G → C → F ∩ D → E

3) Najdi několik cest mezi Malíkovem a Obřím a vyber tu nejkratší.



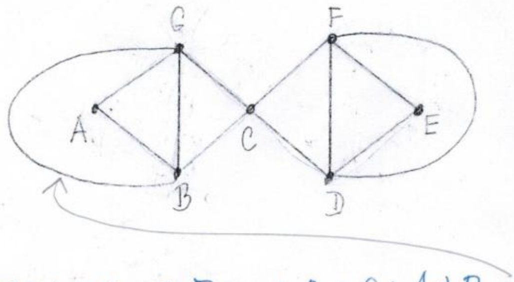
Malíkov – Obří = 26

(Intuitivně hledala nejkratší cestu.)

A'ĎA. S.
2/II.

1) Babička jde na procházku do parku se sochami a chce projít všechny stezky tak, aby každou z nich prošla právě jednou. Kterou sochu uvidí jako poslední, když začne u sochy označené písmenem C?

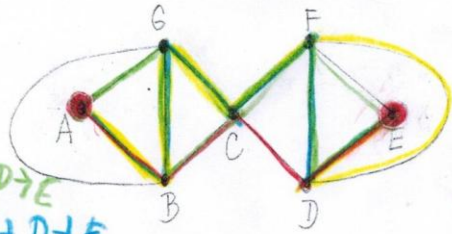
B ∩ G
B → G



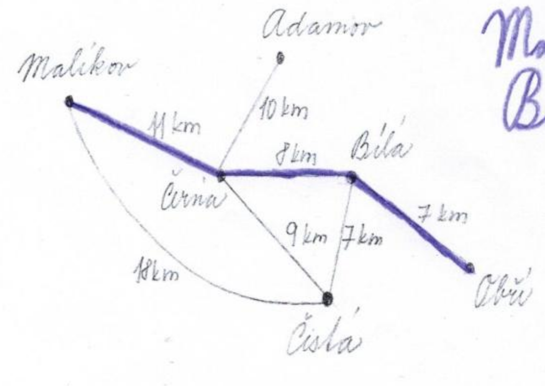
C → D → F → E → D → ∩ F → C → B → G → A → B → ∩ G → C

2) Najdi několik cest, kterými se dostane od sochy označené písmenem A k soše označené písmenem E.

A → B → C → D → E
A → G → B → C → F → D → E
A → B → G → C → F → D → E
A → B → G → C → F → ∩ E



3) Najdi několik cest mezi Malíkovem a Obřím a vyber tu nejkratší.

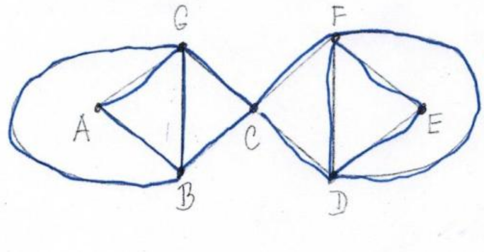


Malíkov – Černá – Bílá – Obří

JÁCHYM
BERNARD

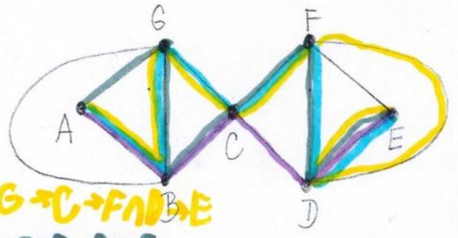
2/1.

1) Babička jde na procházku do parku se sochami a chce projít všechny stezky tak, aby každou z nich prošla právě jednou. Kterou sochu uvidí jako poslední, když začne u sochy označené písmenem C?



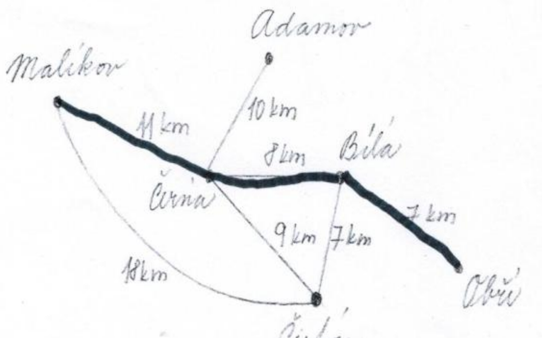
C→D→F→E∩F→C→B
C←G∩B←A←G

2) Najdi několik cest, kterými se dostane od sochy označené písmenem A k soše označené písmenem E.



A→B→G→C→F∩D→E
A→G→B→C→F→D→E
A→B→C→D→E
A→B→G→C→F→D→E

3) Najdi několik cest mezi Malíkovem a Obřím a vyber tu nejkratší.

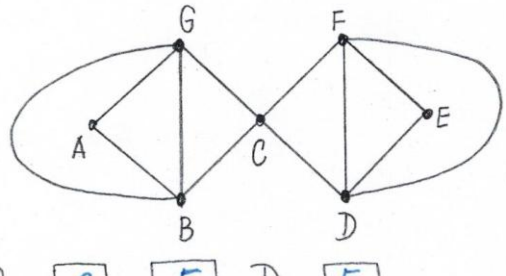


MALÍKOV OBŘÍ=26

Anna
Bro
L.A

2/11.

1) Babička jde na procházku do parku se sochami. Doplň, v jakém pořadí sochy uvidí.

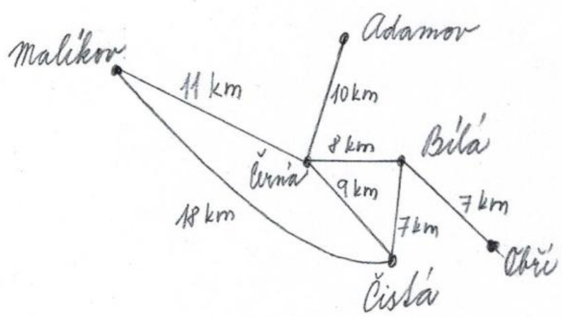


A – [G] – B – [C] – [E] – D – [E]

B – [A] – [G] – C – D – [e] – [F]

G – [B] – [C] – D – [C] – [B] – A

2) Doplň tabulku vzdálenosti mezi obcemi podle obrázku.

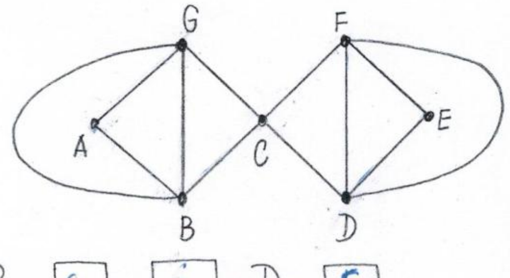


	Malíkov	Adamov	Bílá	Obří	Čistá	Černá
Malíkov	0	21	19	26	18/20	11
Adamov	21	0	18	25	19	10
Bílá	19	18	0	7	7	8
Obří	26	25	7	0	14	15
Čistá	18/20	19	7	14	0	9
Černá	11	10	8	15	9	0

Viki

1) Babička jde na procházku do parku se sochami. Doplň, v jakém pořadí sochy uvidí.

2/11.

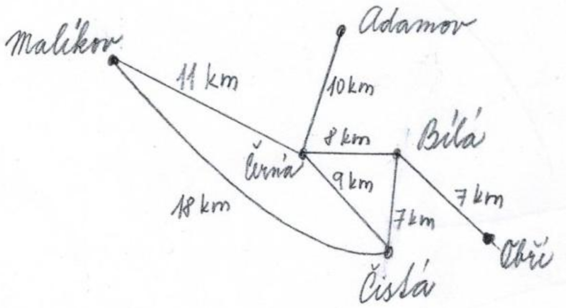


A – $\boxed{G}$ – B – $\boxed{C}$ – $\boxed{F}$ – D – $\boxed{E}$

B – $\boxed{A}$ – $\boxed{G}$ – C – D – $\boxed{F}$ – $\boxed{E}$

G – $\boxed{C}$ – $\boxed{F}$ – D – $\boxed{C}$ – $\boxed{G}$ – A

2) Doplň tabulku vzdálenosti mezi obcemi podle obrázku.



	Malíkov	Adamov	Bílá	Obří	Čistá	Černá
Malíkov	0	21	19	26	18/20	11
Adamov	21	0	18	25	19	10
Bílá	19	18	0	7	7	8
Obří	26	25	7	0	14	15
Čistá	18/20	19	7	14	0	16
Černá	11	10	8	15	16/9	0

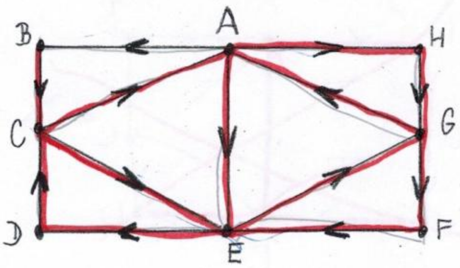
Příloha č. 12

Vyřešené pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 3. ročník ZŠ.

Simona Hanžlová

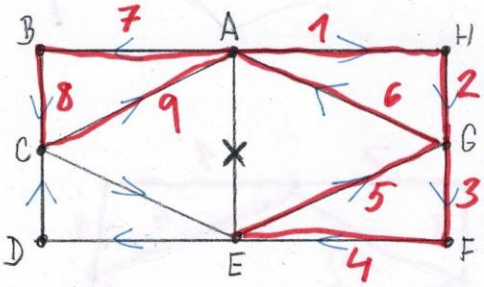
3/11

1) V obci zavedli silničáři mezi křižovatkami kvůli opravám jednosměrný provoz. Najdeš cestu pro popeláře, kteří musí projet každou z cest právě jednou a jejich cesta začíná křižovatkou označenou písmenem A? Vrátí se na konci své cesty do výchozího bodu?

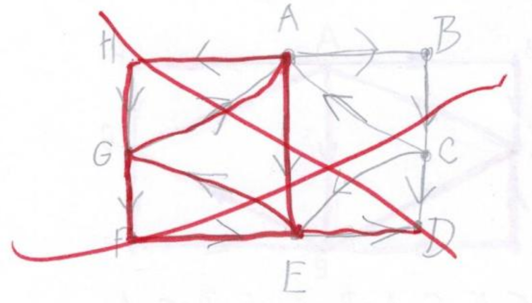


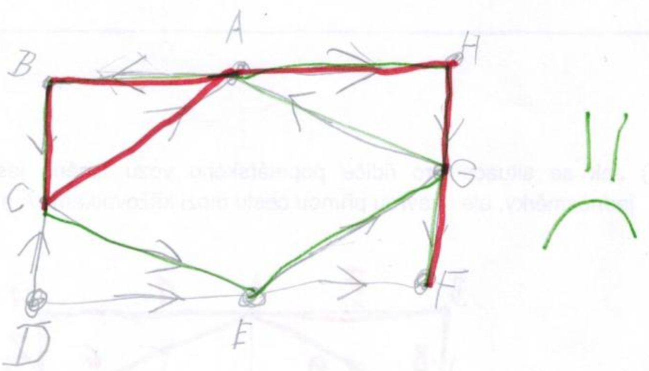
A-H-G-F-E-G-A-B-G-E-D-C-A

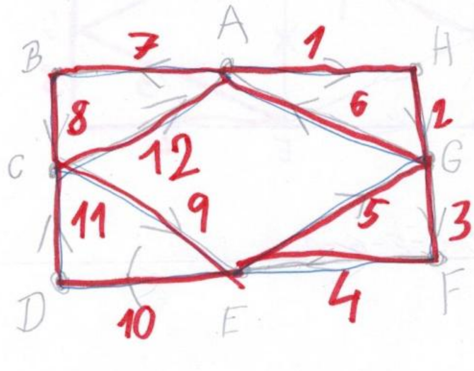
2) Jak se situace pro řidiče popelářského vozu změní, jestliže silničáři zruší jednosměrky, ale uzavřou přímou cestu mezi křižovatkami A a E?



A-B-C-A-H-G-F-E-D-C-E-G-A


H
A
B
G
C
F
E
D

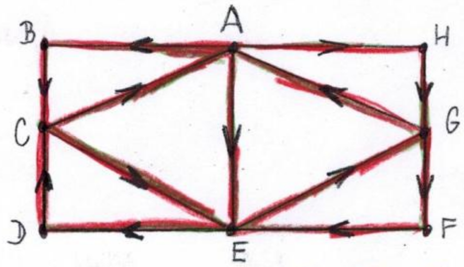

A
B
H
G
C
D
E
F


B
7
A
1
H
8
6
2
C
12
G
11
9
5
3
D
10
E
4
F

Brillanto-
vá ♥☺♥

3/11.

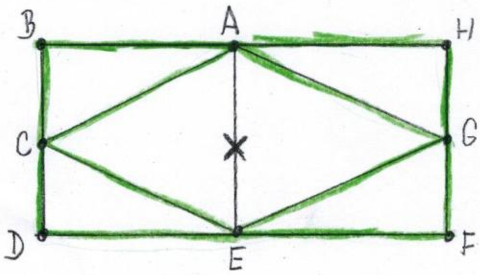
1) V obci zavedli silničáři mezi křižovatkami kvůli opravám jednosměrný provoz. Najdeš cestu pro popeláře, kteří musí projet každou z cest právě jednou a jejich cesta začíná křižovatkou označenou písmenem A? Vrátí se na konci své cesty do výchozího bodu?



A - H - G - A - B - C - A - E - G - F - E - D - C - E

Popeláři se nevrátí se stejného bodu do stejného.

2) Jak se situace pro řidiče popelářského vozu změní, jestliže silničáři zruší jednosměrky, ale uzavřou přímou cestu mezi křižovatkami A a E?



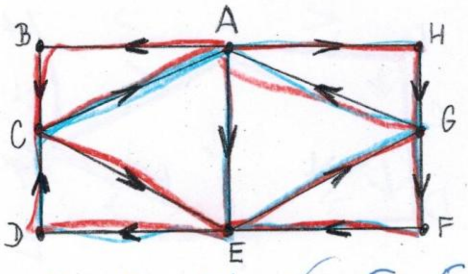
A - B - C - A - G - E - C - D - E - F - G - H - A

Vyjela jsem z bodu A a taky skončila v bodě A

Karolína Koudelová

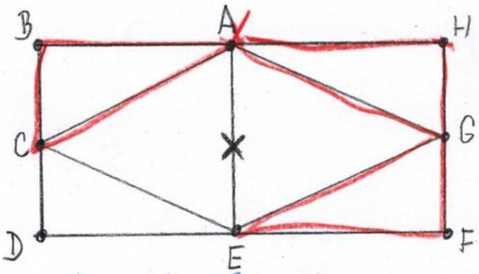
3/11

1) V obci zavedli silničáři mezi křižovatkami kvůli opravám jednosměrný provoz. Najdeš cestu pro popeláře, kteří musí projet každou z cest právě jednou a jejich cesta začíná křižovatkou označenou písmenem A? Vrátí se na konci své cesty do výchozího bodu?



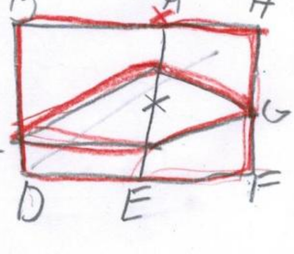
A – B – C – A – H – G – F – E – G – A – E – D – C – E DETO ALE NESKONČÍ VE/V STEJNÉHO BODU.

2) Jak se situace pro řidiče popelářského vozu změní, jestliže silničáři zruší jednosměrky, ale uzavřou přímou cestu mezi křižovatkami A a E?



A – H – G – F – E – G – A – C – E – D – C – B – A

ANO DETO.



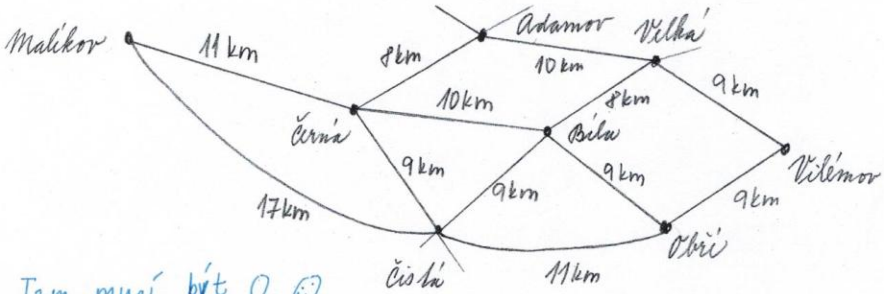
Příloha č. 13

Vyřešené pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 4. ročník ZŠ.

Ondra Y.

4/1.

1) Doplň tabulku vzdálenosti mezi obcemi podle mapy:

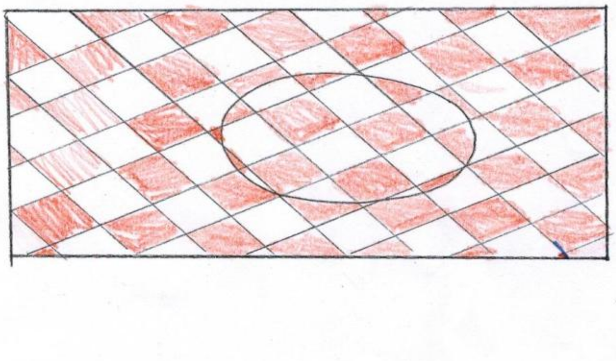


Tam musí být 0. ☺

	Malíkov	Adamov	Bílá	Obří	Čistá	Černá	Velká	Vilémov
Malíkov	0	19	21	30	17	11	29	38
Adamov	19	0	18	27	17	8	10	19
Bílá	21	18	0	9	9	10	8	17
Obří	30	27	9	0	11	19	17	9
Čistá	17	17	9	11	0	9	17	30
Černá	11	8	10	19	9	0	18	21
Velká	29	29	8	17	17	18	0	9
Vilémov	38	29	11	9	30	21	9	0

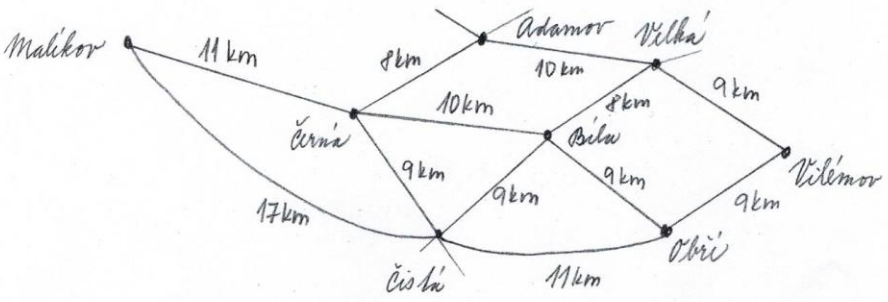
TATO PŮLKA = TÉ DRUHÉ. ☺ Jsou zrcadlově

2) Vybarvi mozaiku za použití co nejmenšího počtu barev tak, aby byla každá dvě sousední políčka vybarvená jinou barvou.



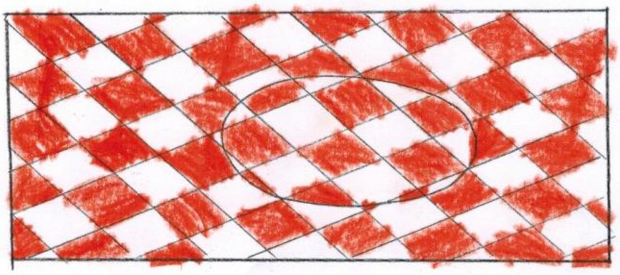
4/1.

1) Doplň tabulku vzdálenosti mezi obcemi podle mapy:



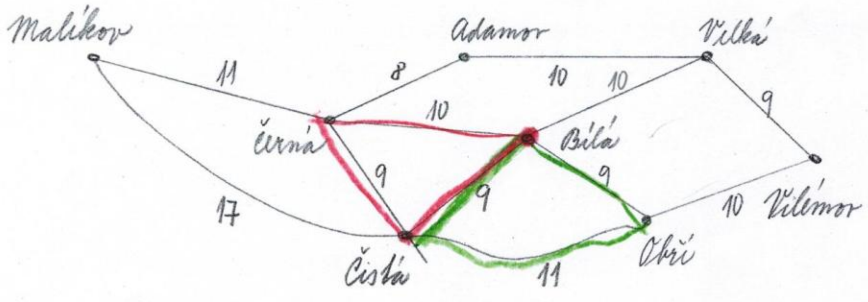
	Malíkov	Adamov	Bílá	Obří	Čistá	Černá	Velká	Vilémov
Malíkov		19 km	21 km	30 km	17 KM	11 KM	29 KM	31 KM
Adamov	19 km		18 km	28 km	17 KM	8 KM	10 KM	19 KM
Bílá	21 km	18 km		9 KM	9 KM	10 KM	8 KM	17 KM
Obří	30 km	28 km	9 KM		11 KM	19 KM	17 KM	9 KM
Čistá	17 KM	17 KM	9 km	11 KM		9 KM	17 KM	20 KM
Černá	11 KM	8 KM	10 KM	19 KM	9 KM		18 KM	27 KM
Velká	29 KM	10 KM	8 KM	17 KM	17 KM	18 KM		9 KM
Vilémov	31 KM	19 KM	17 KM	9 KM	20 KM	27 KM	9 KM	

2) Vybarvi mozaiku za použití co nejmenšího počtu barev tak, aby byla každá dvě *sousední políčka vybarvená jinou barvou.*



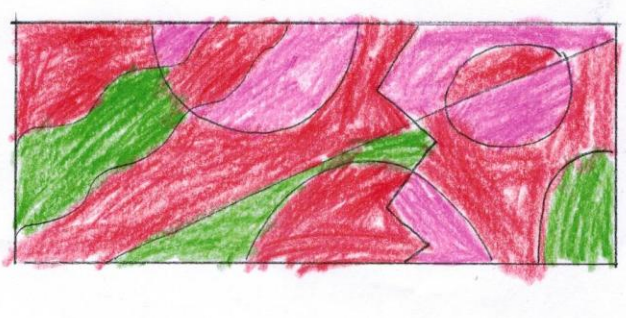
4/11.

1) Navrhni různé trasy podle mapy pro cyklistu, který chce denně ujet 25 – 30 kilometrů. Na kolik dnů by mu tvé návrhy vystačily?



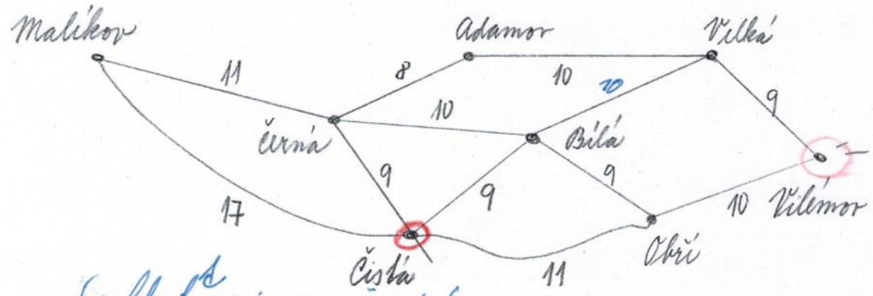
Má to 2 cesty.

2) Vybarvi mozaiku za použití co nejmenšího počtu barev tak, aby byla každá dvě sousední políčka vybarvená jinou barvou.



Karolína
4/II.

1) Navrhni různé trasy podle mapy pro cyklistu, který chce denně ujet 25 – 30 kilometrů. Na kolik dnů by mu tvé návrhy vystačily?

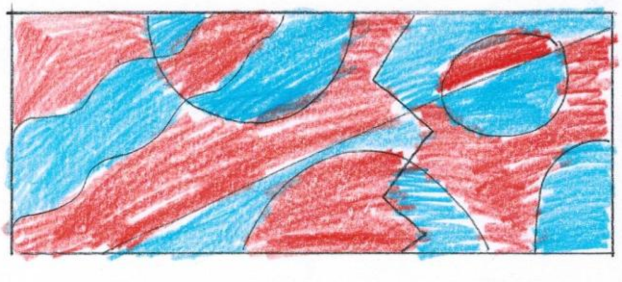


Cyklista je v Čisté:

Či – B – Ča – Či   9 + 10 + 9 = 28

Či – O – B – Či   11 + 9 + 9 = 29

2) Vybarvi mozaiku za použití co nejmenšího počtu barev tak, aby byla každá dvě sousední políčka vybarvená jinou barvou.



Příloha č. 14

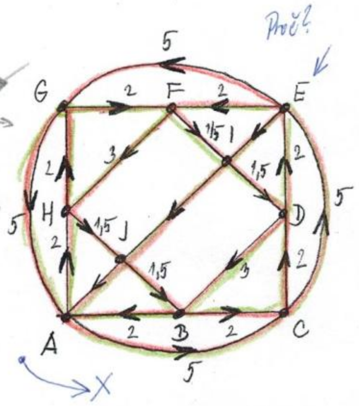
Vyřešené pracovní listy k procvičení úloh s využitím prvků z teorie grafů pro 5. ročník ZŠ.

5/11.

Kuba

1) Nakresli obrázek jedním tahem, při kreslení musíš dodržet zadanou orientaci čar.

~~G → F → H → G → A → → H → J → B → A → C → → D → B → C → E → → F → I → D → E → → I → J → A~~



Proč?

E → F → I → D → E → I → → J → A → H → J → B → A → → C → D → B → C → E → G → → F → H → G → A

– protože je lepší začít tam, kde je více cest.

2) Najdi a popiš několik cest z bodu A do bodu E. Vypočítej jejich délku a vyber tu nejkratší.

$A \xrightarrow{2} H \xrightarrow{2} G \xrightarrow{2} F \xrightarrow{1,5} I \xrightarrow{1,5} D \xrightarrow{2} E$ $2+2+2+1,5+1,5+2 = \cancel{12}\ 11$

$A \xrightarrow{2} H \xrightarrow{1,5} J \xrightarrow{1,5} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{2} D \xrightarrow{2} E$ $2+1,5+1,5+2+2+2 = 11$

$A \xrightarrow{5} C \xrightarrow{5} E$ ~~nejkratší~~ $5+5 = 10$

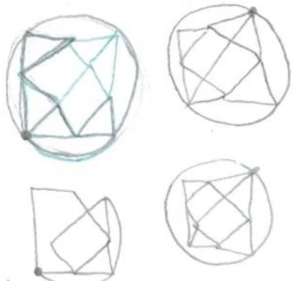
$A \xrightarrow{5} C \xrightarrow{2} D \xrightarrow{2} E$ $5+2+2 = 9$ nejkratší

$A \xrightarrow{2} H \xrightarrow{1,5} J \xrightarrow{1,5} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{5} E$ $2+1,5+1,5+2+5 = 12$

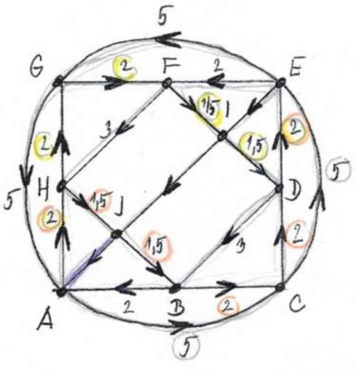
Lechké další ! ☺

Jindra H. 5/11.

1) Nakresli obrázek jedním tahem, při kreslení musíš dodržet zadanou orientaci čar.



od A
to nejde



E → G → A → C → E →
F → D → B → C →
D → E → ~~FA →~~ I → J
~~A →~~ B → A → H → G
F → H → J → A

2) Najdi a popiš několik cest z bodu A do bodu E. Vypočítej jejich délku a vyber tu nejkratší.

① A → C → E 5 + 5 = 10 Tato cesta je nejkratší.

② A → H → G → F → ~~E~~ I D → E 2 + 2 + 2 + 3 + 2 = 11

③ A → H → ~~B~~ J → C → E 2 + 1,5 + 1,5 + 2 + 2 + 2 = 11

④ A → H → J → A → C → D → B → C → E

2 + 1,5 + — + ~~2~~ 5 + 2 + 3 + 2 + 5 = 20,5 + —

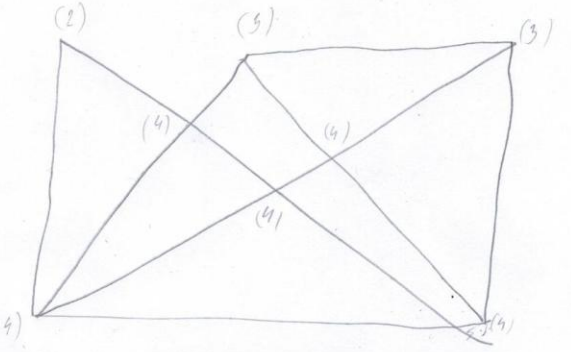
↑
Neznám délku.

Proč to z vrcholu A nejde? „Nevím, nezjistil jsem."

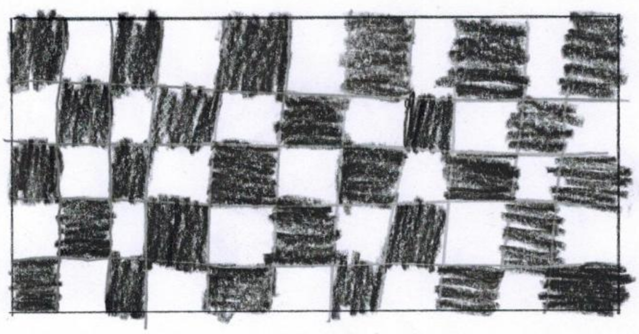
Co sis označil pastelkami? „Délky cest, abych se nepletl při počítání a fialovou délku cesty neznám!"

Ondra 5/1.

1) Navrhni obrázek tak, aby se dal nakreslit jedením tahem, přičemž každá čára musí být vytažena právě jednou.

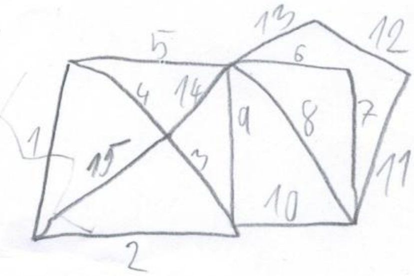


2) Navrhni mozaiku tak, aby se dala vybarvit dvěma pastelkami a žádná dvě sousední pole nebyla vybarvena stejnou pastelkou.



Tobiáš 5/1.

1) Navrhni obrázek tak, aby se dal nakreslit jedením tahem, přičemž každá čára musí být vytažena právě jednou.



2) Navrhni mozaiku tak, aby se dala vybarvit dvěma pastelkami a žádná dvě sousední pole nebyla vybarvena stejnou pastelkou.